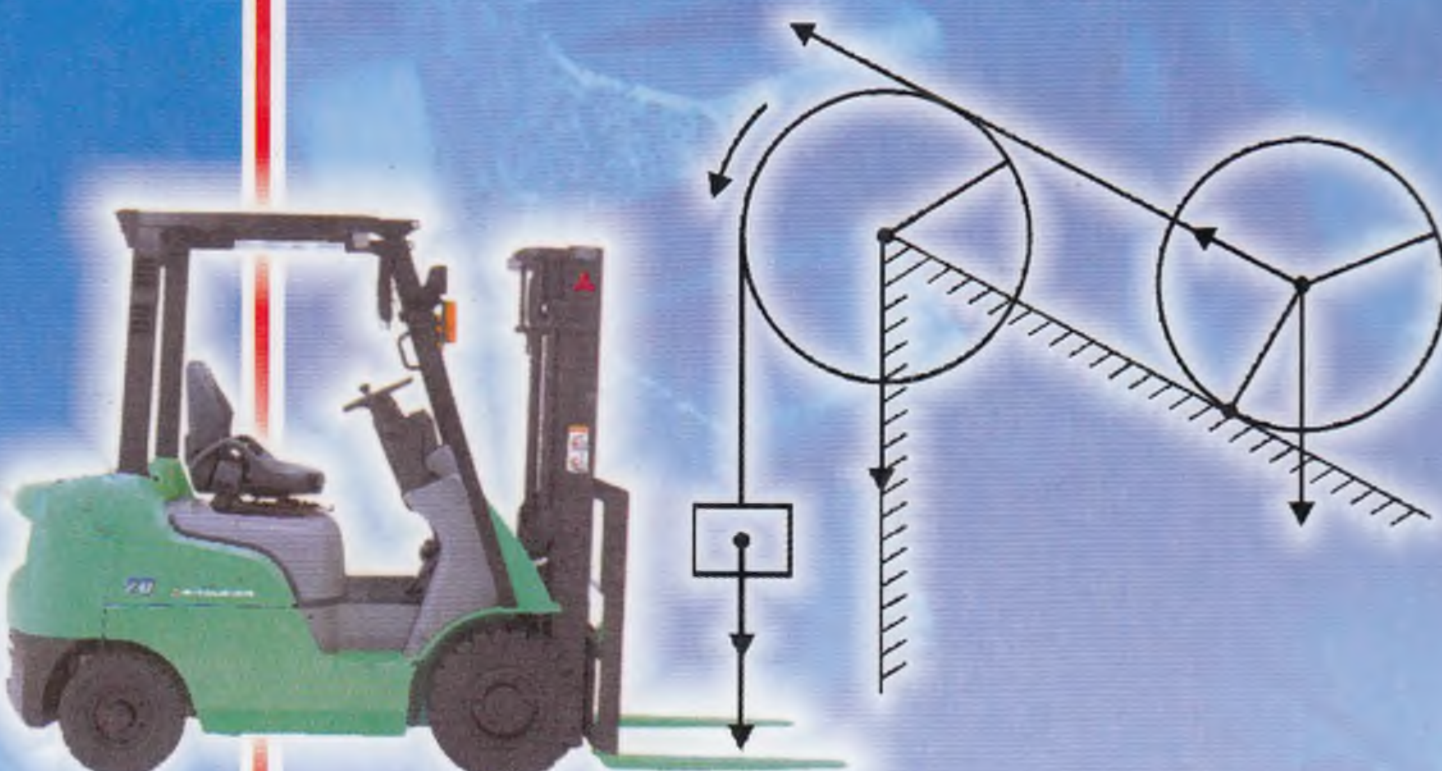
M.M. MIRSAIDOV,
L.I. BOYMURODOVA,
N.T. G'IYOSOVA

NAZARIY MEXANIKA



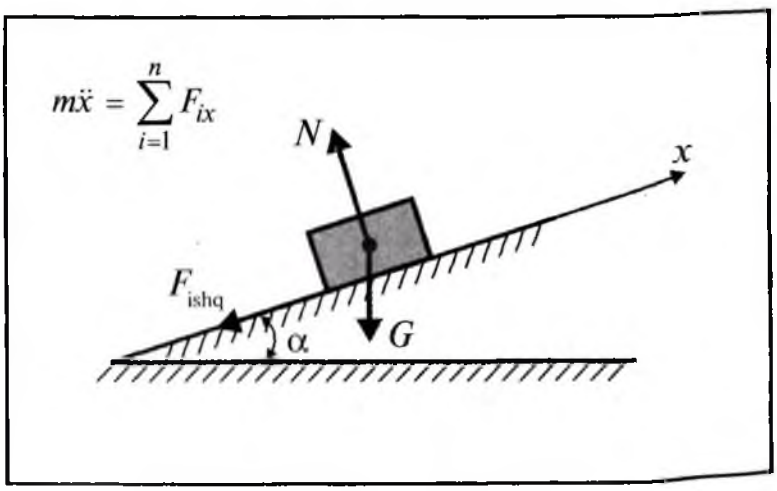
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

O'RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA'LIMI MARKAZI

M.M. Mirsaidov, L.I. Boymurodova, N.T. G'iyosova

NAZARIY MEXANIKA

Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma



«ILM ZIYO»
TOSHKENT – 2009

22.21
M56

Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi ilmiy-metodik birlashmalari faoliyatini muvofiqlashtiruvchi Kengash tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

Ma'sul muharrir: O'zbekiston milliy universiteti dotsenti, f-m.f.d. **B. Atajanov**

Taqrizchilar: Toshkent Davlat texnika universiteti «Nazariy mexanika, mashina detallari, servis texnikasi va texnologiyasi» kafedrasi professori, t.f.d. **K.A. Karimov**,

Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti «Nazariy mexanika va materiallar qarshiligi» kafedrasi professori, t.f.d. **T.M. Mavlonov.**

O'quv qo'llanma uchta bo'limdan iborat bo'lib, birinchi – statika bo'limida qattiq jism statikasi, statikaning asosiy aksiomalari; kesishuvchi kuchlar, momentlar, juft kuchlar nazariyalari; og'irlik markazi kabi mavzular yoritilgan.

Kitobning ikkinchi bo'limi kinematikaga oid mavzularni qamrab olgan. Unda jumladan: moddiy nuqta kinematikasi, qattiq jismning harakatlari, moddiy nuqtaning murakkab harakati kabi mavzular bayon etilgan.

O'quv qo'llanmaning uchinchi – dinamika bo'limining o'zi oltita bobdan iborat bo'lib, unda dinamikaning asosiy tushunchalari, moddiy sistema va nuqta dinamikasining umumiy teoremalari, Dalamber prinsipi, dinamikaning umumiy tenglamalari kabi qator mavzular o'z aksini topgan.

Qo'llanmadagi ko'p masalalar oliy o'quv yurtlarining qator ixtisosliklari uchun mo'ljallangan bo'lib, amaliy masalalarni hal etishda egallangan nazariy bilimlardan foydalanish yo'llari va natijalarni tahlil qilish ham ko'rsatib berilgan.

O'quv qo'llanma oliy o'quv yurtlarining qurilishi, muhandislik, suv xo'jaligi, transport va kasbiy ta'lim sohasi bo'yicha bilim oluvchi bakalavriyat talabalari uchun mo'ljallangan.

ISBN 978–9943–16–003–3

SO‘ZBOSHI

Hozirgi zamon fan-texnikasi va kompyuter texnologiyasining rivojlanishi oliy o‘quv yurtlari o‘quv jarayoniga yangi fanlarni olib kirdi. Mamlakatimiz oliy ta’limida bir pog‘onali tizimdan ikki pog‘onali bakalavr-magistr tizimiga o‘tilishi bilan barcha texnika fanlari qatori, nazariy mexanika fanining ham o‘quv soatlari hajmi qisqartirildi. Oliy o‘quv yurtlarida ta’lim olayotgan talabalar uchun Respublikamiz Davlat ta’lim standartlaridan kelib chiqqan holda hozirga qadar «Nazariy mexanika» fanining qisqa kursi yaratilgan emas. Lekin muhandislik ishlarida muammoli va amaliyotga tatbiq etiladigan masalalarni hal etishda nazariy mexanika fani fundamental predmetlardan biri hisoblanadi. Shuning uchun mazkur kursni lotin grafikasida chop etish dolzarb masala hisoblanib, ayniqsa qisqa vaqt ichida bo‘lajak mutaxassislarga nazariy mexanikadan zarur bo‘lgan nazariy va amaliy bilim va ko‘nikmalarni sodda hamda ravon tilda mukammal yetkazish muhim masala bo‘lib qoldi. Ushbu o‘quv qo‘llanma shularni e’tiborga olib yaratildi.

O‘quv qo‘llanmada nazariy mexanikaning statika bo‘limidagi juft kuch momenti vektori haqidagi teoremalar vektorlar algebrasidagi tushunchalar asosida qisqacha talqin etildi. Juft kuch momenti vektoriga oid boshqa teoremalar xususiy hol sifatida yoritildi. Kuchlar sistemasini qo‘shish fazoda joylashgan kuchlar uchun berilib, so‘ngra tekislikda joylashgan kuchlar sistemasiga tegishli nazariy ma’lumotlar xususiy hol ko‘rinishida keltirib chiqarildi. Shuningdek, kinematika bo‘limidagi moddiy nuqta va jism nuqtasining tezlik hamda tezlanishlari vektor, koordinata keyin tabiiy usullarda bayon qilindi.

Qo‘llanmada nazariy mexanikaning prinsiplaridan Dalamber, mumkin bo‘lgan ko‘chish, Dalamber-Lagranj prinsiplari to‘liq tushuntirilib berildi. Dinamikaning umumiy teoremalari esa sistema uchun yoritildi, so‘ngra qattiq jism va moddiy nuqta uchun xususiy hol sifatida keltirib chiqarildi.

Taqdim etilayotgan qo‘llanmada ko‘pgina masalalar hal etilgan bo‘lib, ular oliy o‘quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan. Bu qo‘llanmadan texnika va pedagogika oliy o‘quv yurtlarining talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Qo‘llanma qo‘lyozmasini o‘qib chiqib, uning sifatini oshirish borasida bergan maslahatlari uchun Respublikamiz oliy o‘quv yurtlarining professor, o‘qituvchilariga, jumladan professorlar K.S.Sultonov, A.R.Rizayev, TDTU professori K.A.Karimov, TTESI professori T.M.Mavlonov hamda TDMU dotsenti B.Atajonovga mualliflar o‘z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

O‘quv qo‘llanma haqidagi fikr va mulohazalaringizni quyidagi manzilga yuborishingizni so‘raymiz: *Toshkent, Navoiy ko‘chasi, 30-uy.*

KIRISH

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga ta'siri va mexanik harakatlarning umumiy qonunlari haqidagi fandir.

Vaqt o'tishi bilan fazoda moddiy jismlarning bir-biriga nisbatan o'rin almashinishi *mexanik harakat* deb ataladi.

Jismning barcha xossalarini hisobga olgan holda sodir bo'ladigan mexanik hodisalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish juda murakkabdir. Shuning uchun mexanikada moddiy nuqta va absolut qattiq jism tushunchalari qo'llaniladi.

Mexanik harakatni yoki muvozanatni tekshirayotganimizda o'lchamlari va shaklining ahamiyati bo'lmagan jism *moddiy nuqta* deb ataladi.

Jism harakati tekshirilayotganda uning ikkita nuqtasi orasidagi masofa doim o'zgarmasdan qolsa, bunday jism *absolut qattiq jism* deyiladi.

Tabiatda absolut qattiq jism yo'q, har qanday jism oz bo'lsa-da deformatsiyalanadi. Agar bu o'zgarish jismning o'lchamlariga nisbatan juda kichik bo'lsa, mexanik harakatni tekshirishda mazkur o'zgarish e'tiborga olinmaydi.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari kuzatish va tajriba natijalariga asoslanadi.

Biz o'rganadigan nazariy mexanika G. Galiley (1564—1642) va I. Nyuton (1643—1727) tomonidan ta'riflab berilgan qonunlarga asoslangan bo'lib, klassik mexanika deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog'liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor deb olinadi.

Klassik mexanikada moddiy jismlarning harakati uch o'lchovli Evklid fazosiga nisbatan tekshiriladi hamda fazoni mutlaqo qo'zg'almas deb qaraladi. Harakat o'lchoviga oid kattaliklar Evklid geometriyasi asosida olinadi.

Xalqaro SI sistemasida vaqt birligi qilib sekund (s), uzunlik birligi qilib metr (m), massa birligi qilib kilogramm (kg), kuch birligi qilib Nyuton (N) qabul qilingan.

Nazariy mexanika, masalaning qanday nuqtayi nazardan qo'yilishiga qarab, statika, kinematika va dinamika qismlariga ajratiladi.

Mexanikaning statika bo'limida jismlarning muvozanati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o'rganiladi. Bu holat mexanik harakatning xususiy holi hisoblanadi. Kinematikada jismlarning harakati, bu harakatni yuzaga keltirayotgan yoki uni o'zgartirayotgan sabablar e'tiborga olinmay, harakat geometrik nuqtayi nazardan o'rganiladi. Dinamikada jismlarning mexanik harakatlari shu harakatni vujudga keltirayotgan sabablarga bog'lab o'rganiladi.

BIRINCHI BO'LIM

STATIKA

I BOB. QATTIQ JISM STATIKASI VA STATIKANING ASOSIY AKSIOMALARI

1- §. Kuch. Kuchlar sistemasi. Ekvivalent sistema. Teng ta'sir etuvchi kuchlar

Nazariy mexanikaning statika bo'limida jismlarning muvozanat holati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o'rganiladi. Statika bo'limiga oid masalalarni ikki turga bo'lish mumkin:

- kuchlarni qo'shish va absolut qattiq jismga qo'yilgan kuchlar sistemasini sodda holga keltirish;
- kuchlar sistemasi ta'siridagi absolut qattiq jism muvozanatining zarur va yetarli shartlarini aniqlash.

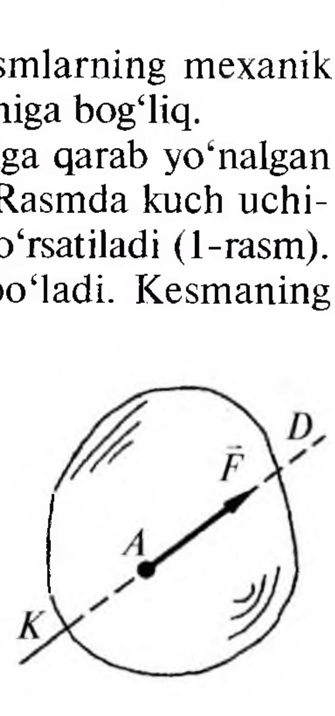
Mexanikada moddiy jismlarning bir-biriga o'zaro ta'siri kuch bilan o'lchanadi. Kuch vektor kattalik bo'lib, uning jismga ta'siri:

- kuch qo'yilgan nuqta;
- kuchning yo'nalishi;
- kuchning miqdori bilan aniqlanadi.

Kuchning Xalqaro birliklar sistemasi (SI)dagi o'lchov birligi sifatida Nyuton (N) qabul qilingan.

Kuchning yo'nalishi va qo'yilish nuqtasi jismlarning mexanik ta'siriga va ularning bir-biriga nisbatan joylashishiga bog'liq.

Masalan, Yerning jismga ta'siri Yer markaziga qarab yo'nalgan bo'lib, u jismning og'irlik markaziga qo'yilgan. Rasmda kuch uchida strelkasi bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi bilan ko'rsatiladi (1-rasm). Kesmaning boshi kuch qo'yilgan nuqta A bo'ladi. Kesmaning uzunligi biror masshtabda kuch miqdorini shartli ravishda ifodalaydi. Kuch yo'nalgan KD to'g'ri chiziq uning *ta'sir chizig'i* deyiladi. Og'irlik kuchining ta'sir chizig'i jism og'irlik markazidan o'tuvchi vertikaldan iborat.



1-rasm.

Kuch vektor kattalik bo'lgani sababli u biror katta harf bilan belgilanadi, bu harfning tepasiga chiziqcha, ya'ni vektor belgisi qo'yiladi (masalan, $\bar{F}$). Kuch miqdori esa F bilan belgilanadi.

Jismga bir vaqtda ta'sir qiluvchi kuchlar to'plami $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ ***kuchlar sistemasi*** deyiladi.

Jismga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_m)$ kuchlar sistemasi bera olsa, bunday kuchlar sistemasi *ekvivalent sistema* deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_m).$$

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining jismga ta'sir kuchini bitta kuch bera olsa, uni *teng ta'sir etuvchi kuch* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}.$$

2- §. Statikaning asosiy aksiomalari

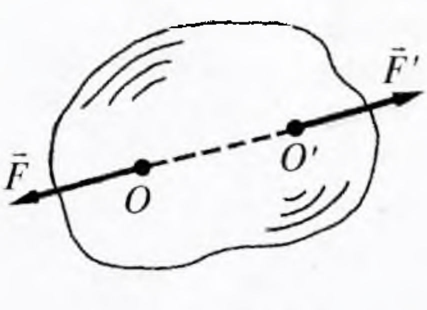
Nazariy mexanikaning statika bo'limi isbot talab qilmaydigan, kundalik tajribalarda tasdiqlangan bir necha aksiomaga asoslanadi.

1. Inersiya aksiomasi. Miqdor jihatidan bir-biriga teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuch ta'siridagi jism o'zining muvozanatini yoki to'g'ri chiziqli va teng o'lchovli harakatini o'zgartirmaydi.

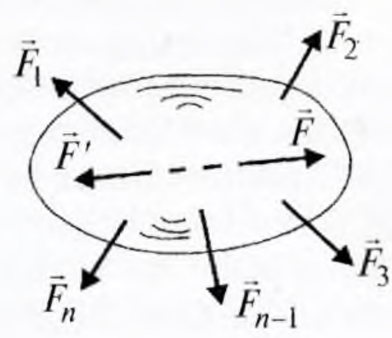
2. Ikki kuchning o'zaro muvozanatlashish aksiomasi. Erkin holatdagi qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgandagina muvozanatlashadi. Bu kuchlar sistemasi nolga ekvivalentdir. Shuning uchun ular *nollik sistema* (2-rasm) deyiladi: $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$.

3. Muvozanatlashuvchi kuchlarni qo'shish va ayirish aksiomasi. Jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga o'zaro muvozatanlashuvchi kuchlar sistemasi qo'shilsa yoki olinsa, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Faraz qilaylik, jism $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsin (3-rasm). Jismga yana $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$ sistemani qo'yaylik. Bunda jism yangi $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirida ham muvozanatda bo'ladi, ya'ni:

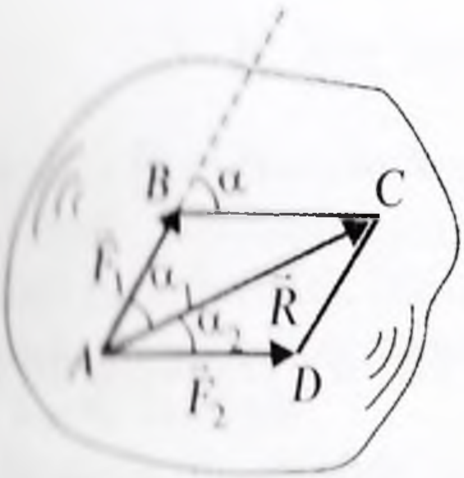
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n).$$



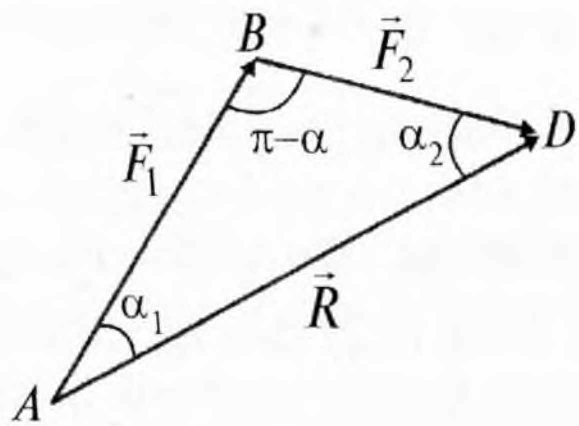
2-rasm.



3-rasm.



4-rasm.



5-rasm.

Yuqoridagi aksiomalardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. *Berilgan kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga miqdori va yo'nalishi o'zgartirilmay ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.*

4. **Parallelogramm aksiomasi**. Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan turli yo'nalishdagi ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi mazkur kuchlarga qurilgan paralellogramm dioganaliga miqdor jihatidan teng bo'lib, shu dioganal bo'ylab yo'naladi (4-rasm): $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Berilgan $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlarga qurilgan parallelogramm *kuch parallelogrammi* deb, kuchlarni bu usulda qo'shish esa *parallelogramm usuli* deb ataladi. Bunda shuni eslatib o'tish lozimki, ikkita $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchni qo'shishda parallelogrammning hammasini qurish shart emas, uni quyidagi tartibda qurish mumkin:

1) kuch miqdori uchun masshtab tanlanadi;

2) $\vec{F_1}$ kuch oxirida tanlab olingan masshtabga muvofiq $\vec{F_2}$ ni o'ziga parallel qilib qo'yamiz (4, 5-rasmlarga q.);

3) $\vec{F_1}$ kuch boshi A bilan $\vec{F_2}$ kuch oxiri D ni tutashtiruvchi vektor bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi (5-rasm).

$\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlarga qurilgan uchburchak kuch uchburchagi, kuchlarni bunday usulda qo'shish esa uchburchak usuli deyiladi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning miqdori va yo'nalishi geometriya yoki trigonometriya formulalaridan foydalanib aniqlanadi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning modulini ΔABD dan kosinuslar teoremasiga asosan aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha)}$$

yoki

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,.$$

$\alpha = 0°$ bo'lganda

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2; \qquad (2.1)$$

$\alpha=180°$ da

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2}=\sqrt{(F_1-F_2)^2}=F_1-F_2; \qquad (2.2)$$

$\alpha=90°$ da $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ bo'ladi.

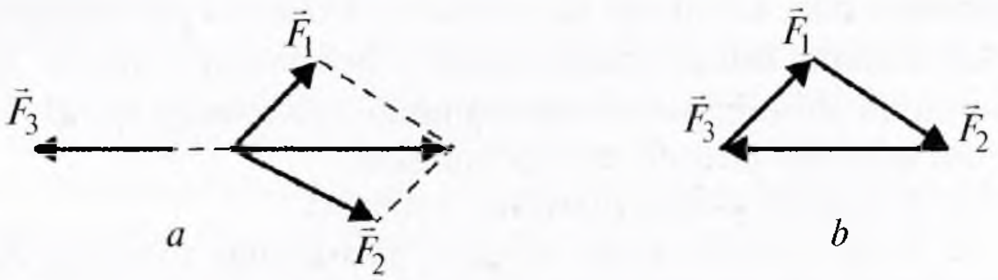
(2.1) va (2.2) dan ko'rinib turibdiki, bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar algebraik qo'shiladi.

Teng ta'sir etuvchi kuch $\vec{R}$ ning $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar bilan tashkil qilgan α_1 va α_2 burchaklari sinuslar teoremasiga ko'ra aniqlanadi:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_2}=\frac{F_2}{\sin\alpha_1}=\frac{R}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot \qquad (2.3)$$

Mazkur aksiomadan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. *Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi va ulardan tuzilgan kuch uchburchagi yopiq bo'ladi*, ya'ni oxirgi $\vec{F}_3$ kuchning uchi $\vec{F}_1$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (6-rasm *a, b*).



6-rasm.

5. Ta'sir va aks ta'sirning tenglik aksiomasi. Absolut qattiq jismlarning bir-biriga ta'siri teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan, ya'ni ta'sir hamma vaqt aks ta'sirga teng va unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Bu aksioma I.Nyuton tomonidan ta'riflangan bo'lib, u klassik mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi.

6. Qattiq bo'lmagan jismlar muvozanatining saqlanish qonuni. Qattiq bo'lmagan jism kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa, jism qattiq holatga aylanganda ham uning muvozanati o'zgarmaydi. Bu aksiomadan ko'ramizki, absolut qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning muvozanat sharti deformatsiyalanadigan jismga qo'yilgan kuchlar uchun ham o'rinli bo'ladi. Deformatsiyalanadigan jismlarga oid bir qancha masalalar, masalan, ip, zanjir, qayish, sterjen kabi jismlardagi zo'riqishlarni aniqlashga oid masalalar yechishda oltinchi aksiomadan foydalanamiz.

3- §. Bog‘lanish va uning reaksiyalari

Fazoda istalgan tomonga harakatlana oladigan jism *erkin jism* deb ataladi. Harakati biror bir sabab bilan cheklangan jism *bog‘lanishdagi jism* deyiladi. Jismning harakatini cheklovchi sabab *bog‘lanish* deb ataladi. Bog‘lanishning ta’sirini almashtiruvchi kuch *reaksiya kuchi* deyiladi.

Nazariy mexanikada bog‘lanishdagi jismning harakatini yoki muvozanatini erkin jismning harakati yoki muvozanatiga keltirib tekshiriladi. Bu hol quyidagi aksioma bilan ifodalanadi.

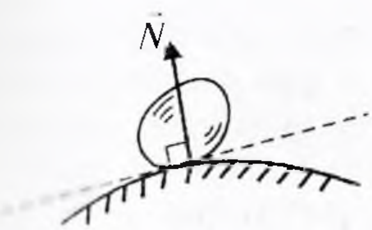
7. **Jismni bog‘lanishdan bo‘shatish aksiomasi.** Bog‘lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun jismga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga bog‘lanish reaksiya kuchini ham qo‘shish kerak.

Statika masalalarini yechishda reaksiya kuchlarini aniqlash alohida ahamiyatga ega.

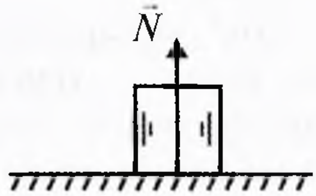
1. Jism silliq sirtga tiralib turgan bo‘lsin. Bu holda reaksiya kuchi jism hamda silliq sirtning o‘zaro tegib turgan nuqtasi orqali o‘tkazilgan umumiy normal bo‘ylab yo‘naladi (7, 8-rasmlar).

Xususan, jism qo‘zg‘almas tayanch tekisligiga tiralib tursa va ishqalanish kuchi hisobga olinmasa, u holda normal reaksiya kuchi jism hamda tayanch tekisligining urinish nuqtasi orqali o‘tkazilgan umumiy normal bo‘ylab yo‘naladi (9-rasm).

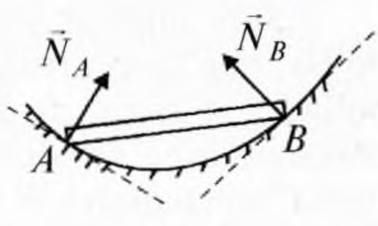
Agar jism tayanch tekisligiga bitta nuqtasi bilan tayansa, uni qaysi tekislikka (jism yoki tayanch tekisligiga) normal o‘tkazish mumkin bo‘lsa, reaksiya kuchi mazkur normal bo‘yicha yo‘naladi (10, 11-rasmlar).



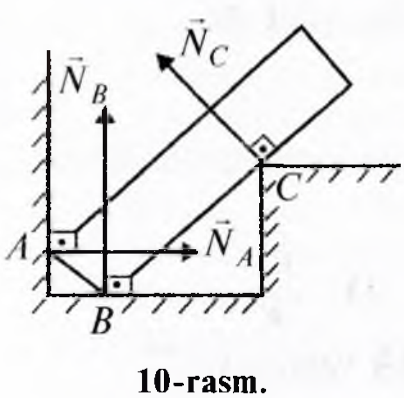
7-rasm.



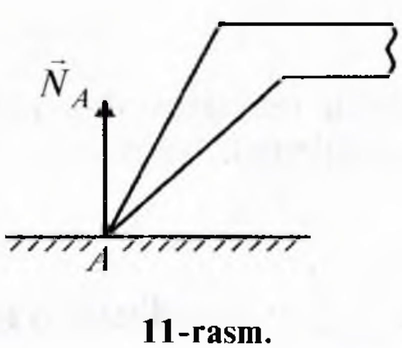
8-rasm.



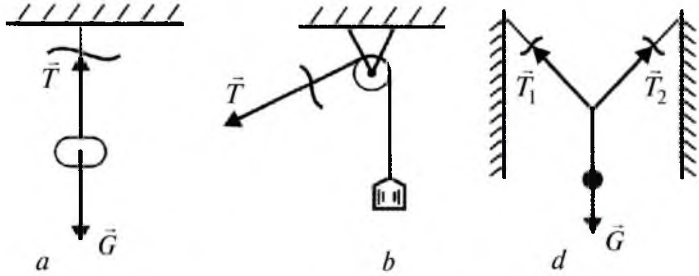
9-rasm.



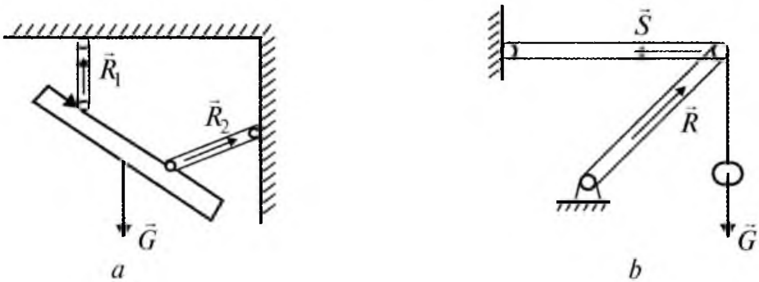
10-rasm.



11-rasm.



12-rasm.



13-rasm.

2. Jism qayish, zanjir, ip (yoki arqon)lar vositasida bog'langan bo'lsa (12-rasm, *a, b, d*), shuningdek vaznsiz qattiq sterjen orqali sharnir vositasida boshqa jismga biriktirilgan bo'lsa (13-rasm, *a, b*), mazkur bog'lanishlarning reaksiya kuchlari qayish, zanjir, ip yoki vaznsiz sterjen bo'ylab yo'naladi.

3. Jism silindrik sharnir yoki podshipniklar vositasida bog'langan bo'lsa, bog'lanish reaksiyasi hamisha aylanish o'qiga perpendikular bo'ladi (14-rasm, *a*). Jismga bir qancha kuchlar ta'sir etsa, sharnir reaksiyasining miqdori va yo'nalishi noma'lum bo'ladi. Bu holda noma'lum reaksiya R ni koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan R_x va R_y tuzuvchilarga ajratiladi (14-rasm, *b*).

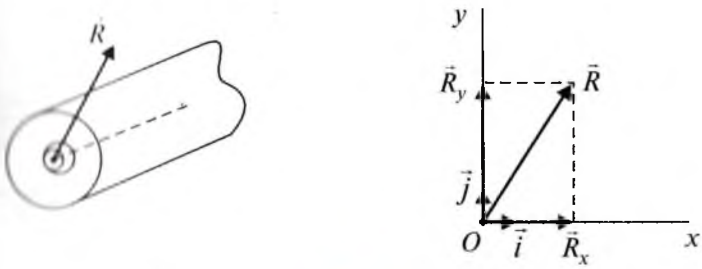
Jismning muvozanat shartlaridan R_x va R_y aniqlangandan so'ng, sharnir reaksiyasining moduli R quyidagicha topiladi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.$$

Sharnir reaksiyasining yo'nalishi esa, yo'naltiruvchi kosinuslari orqali aniqlanadi, ya'ni:

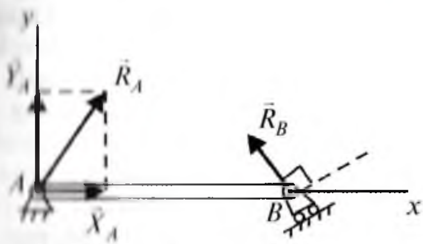
$$\cos(\vec{R}\hat{\ },\vec{i}\,) = \frac{R_x}{R};\ \cos(\vec{R}\hat{\ },\vec{j}\,) = \frac{R_y}{R},$$

bunda: $\vec{i}$, $\vec{j}$ — koordinata o'qlarining birlik vektorlari.

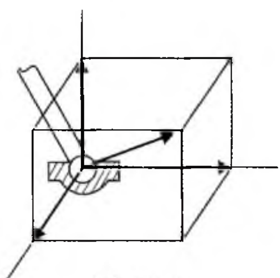


a *b*

14-rasm.



15-rasm.



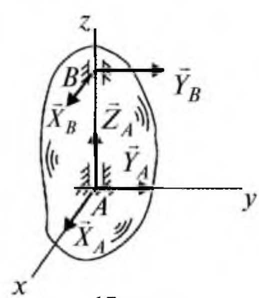
16-rasm.

Texnikada ko'pincha balka ko'rinishidagi sistema qo'llaniladi. Tayanchlarga qo'yilgan to'sin *balka* deb ataladi. Agarda to'sin *A* qo'zg'almas sharnir va *B* qo'zg'aluvchi sharnir vositasida bog'langan bo'lsa, sharnirlar reaksiyasi 15-rasmdagidek yo'naladi.

4. Bog'lanish *A* sferik sharnir yoki podpyatnik (*B* podshipnik)dan iborat bo'lsa, umumiy holda bunday bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi noma'lum bo'ladi. Ular odatda koordinata o'qlari bo'ylab R_x, R_y, R_z tuzuvchilarga ajratiladi (16, 17-rasmlar). Sferik sharnir reaksiyasining miqdori va yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

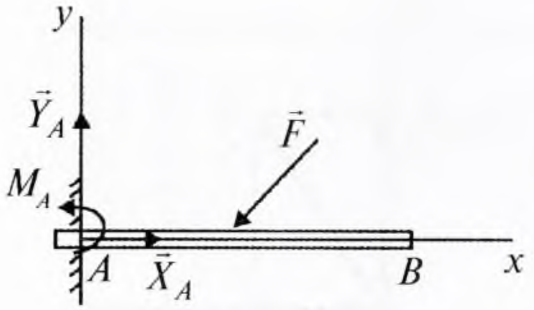
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2};\ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{i})=\frac{R_x}{R};\ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{j})=\frac{R_y}{R};\ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{k})=\frac{R_z}{R}.$$

5. Agarda 18-rasmdagi *AB* balkaning *A* uchi devorga qisib mahkamlangan bo'lsa, bu holda *A* nuqtadagi bog'lanish reaksiyasining ikkita tuzuvchisidan tashqari, balkaning *A* nuqta atrofida aylanishiga to'sqinlik qiluvchi reaksiya momenti M_A ham mavjud bo'ladi. Moment tushunchasini keyinroq kiritamiz.

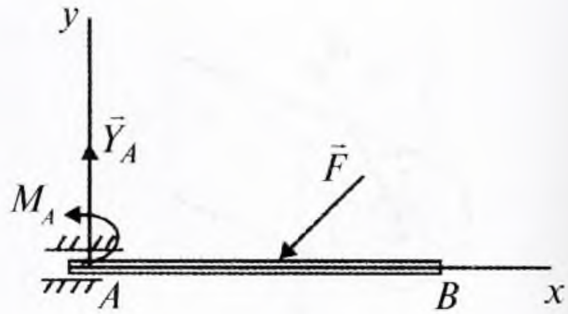


17-rasm.

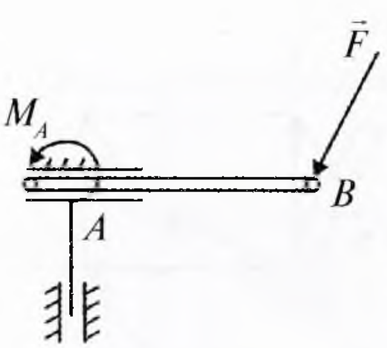
6. 19-rasmda ko'rsatilgan *AB* balkaning *A* uchi gorizontal bo'ylab siljiydigan qilib mahkamlangan. Bunday bog'lanish reaksiyasi sil-



18-rasm.



19-rasm.



20-rasm.

jish tekisligiga perpendikular bo‘lgan $\vec{Y}_A$ reaksiya kuchidan hamda balkaning A nuqta atrofida aylanishiga to‘sqinlik qiluvchi reaksiya momenti M_A dan iborat bo‘ladi.

20-rasmda ko‘rsatilgan AB balkaning A uchi ham gorizontal, ham vertikal bo‘ylab siljiydigan qilib mahkamlangan. Bu holda A nuqtada faqat balkaning A nuqta atrofida aylanishiga qarshilik qiluvchi M_A reaksiya momenti mavjud bo‘ladi.

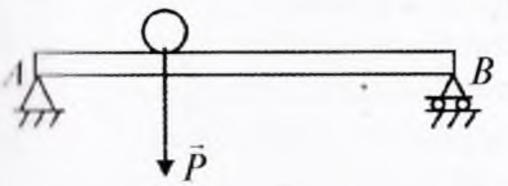
4- §. Inshoot va mashinalarga qo‘yiladigan kuchlarning turlari

Jismga ta’sir etuvchi kuchlarning quyidagi turlari uchraydi.

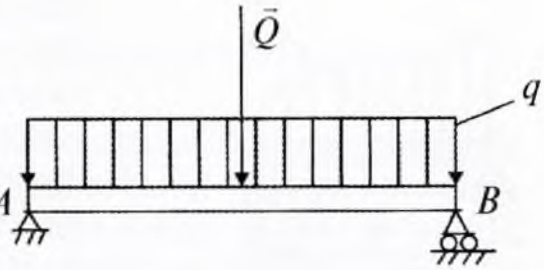
1. To‘planma kuch. Bir-biriga tegib turadigan ikki jismning o‘zaro ta’sir kuchi ularning urinib turgan nuqtasiga qo‘yilgan deb hisoblanadi. Haqiqatan esa jismlarning tegib turgan joyida deformatsiya hosil bo‘lib, ularning o‘zaro ta’siri urinib turgan nuqtaga qo‘yilmay biror yuzachaga qo‘yiladi. Bu yuzachaning sathi juda kichik bo‘lsa-da cheklidir. Darhaqiqat, ikkita jismning tegib turgan yuzasi jism o‘lchamlariga qaraganda juda kichkina bo‘lsa, bu yuzani bir nuqta deb, kuch esa nuqtaga qo‘yilgan to‘planma kuch deb hisoblanadi. Bu to‘planma kuch jismlarning tegib turgan yuzasidagi bosimlarning teng ta’sir etuvchisidir.

Masalan, ikki uchi bilan tayanch ustida yotgan to‘sinning biror joyiga qo‘yilgan og‘ir jismning to‘sin sirtiga tegib turgan yuzasi juda kichik bo‘lganida shu yuza bo‘yicha ta’sir etuvchi kuchlar o‘rniga ularning teng ta’sir etuvchisi $\vec{P}$ ni olamiz (21- rasm).

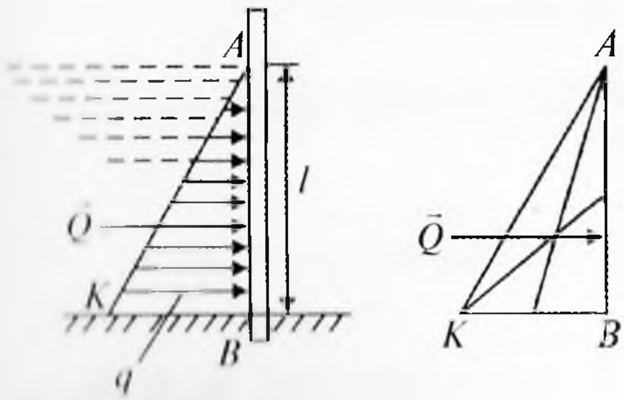
2. Taqsimlangan kuchlar. Mashina yoki inshoot qismining ma’lum yuzasi yoki uzunligi bo‘yicha qo‘yilgan kuch uzluksiz ta’sir ko‘rsatib tursa, bunday kuch *taqsimlangan kuchlar* deyiladi.



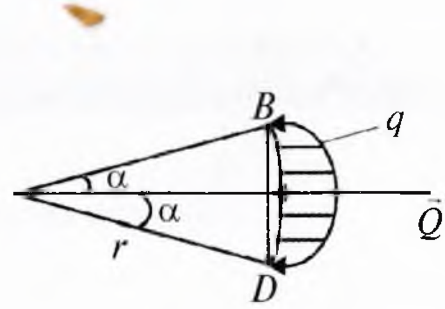
21-rasm.



22-rasm.



23-rasm.



24-rasm.

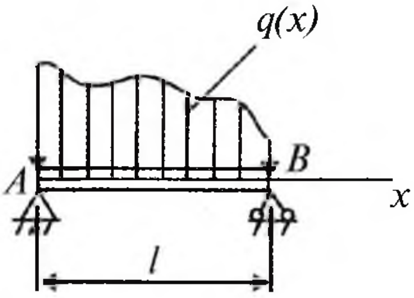
Uzunlik birligi yoki yuza birligiga ta'sir qiluvchi kuchlarning intensivligi q bilan belgilanadi va mos ravishda N/m yoki N/m^2 bilan o'lchanadi.

Taqsimlangan kuchlarga ko'prik balkasining ustiga yotqizilgan beton yoki asfaltning ta'siri misol bo'la oladi. Beton yoki asfalt balka bo'yicha tekis yotqizilgan bo'lib, balkaga 22-rasmda ko'rsatilgandek ta'sir qiladi. Masalani yechishda taqsimlangan kuchlar bir nuqtaga qo'yilgan kuch bilan almashtiriladi. 22-rasmda tasvirlangan taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi AB uchastkaning o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, kuch kattaligi $Q = q \cdot AB$ bo'ladi.

Taqsimlangan kuchlarga yana bir misol sifatida to'g'on devoriga suvning ta'sirini keltirish mumkin (23- rasm). Bu kuchning taqsimlanishi suv yuzasidan to'g'on tagigacha uchburchak qonuni bilan o'zgarib boradi. Bu holda taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasidan o'tadi va miqdori $ql/2$ bo'ladi.

Agarda taqsimlangan kuch aylananing BD yoyi bo'yicha ta'sir etsa (24-rasm), uning teng ta'sir etuvchisi $Q = q \cdot BD$ bo'ladi. Bunda BD uzunlik BD yoy vatari uzunligini bildiradi. $\vec{Q}$ ning ta'sir chizig'i BD vatar o'rtasidan o'tadi.

Inshoot qismlariga qo'yilgan kuchlar tekis taqsimlanmay, ixtiyoriy ravishda taqsimlangan bo'lishi mumkin. Tuproq, qum kabi sochi-



25-rasm.

luvchi materiallar bilan yuklangan balka bunga misol bo‘la oladi. Bu holda agar taqsimlangan kuchlarning intensivligi $q=q(x)$ qonuniyat asosida o‘zgarsa (25-rasm), bunday kuchlarning teng ta’sir etuvchisi Q, balka AB va $q(x)$ egri chizig‘i bilan chegaralangan yuza orqali ifodalanadi:

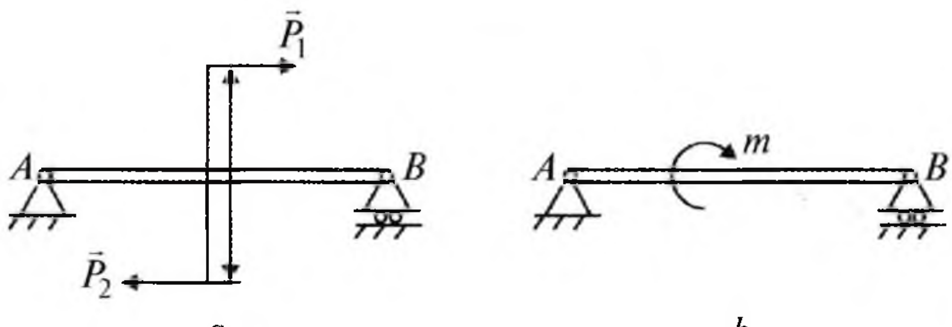
$$Q = \int_0^l q(x)dx.$$

Q kuchning ta’sir chizig‘i mazkur yuzaning og‘irlik markazidan o‘tadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$x = \frac{\int_0^l xq(x)dx}{\int_0^l q(x)dx}.$$

3. Juft kuch. Ma’lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qarama-qarshi yo‘nalgan va miqdor jihatidan teng bo‘lgan ikkita kuch *juft kuch* deyiladi. 26-rasmda balkaga qo‘yilgan juft kuch tasvirlangan. Juft kuch berilganda, juft kuch tashkil etuvchilari va bu tashkil etuvchilar orasidagi masofa (26-rasm, *a*) yoki uning momenti, juft kuch ta’siridagi aylanma harakat yo‘nalishi ko‘rsatiladi (26-rasm, *b*).

Juft kuch haqida keyinroq to‘xtalib o‘tamiz.



a *b*

26-rasm.

? *Nazorat savollari*

1. Qanday jism absolut qattiq jism deb ataladi?
2. Kuch qanday omillar bilan aniqlanadi?
3. Qanday kuch berilgan kuch sistemasining teng ta’sir etuvchisi deyiladi?
4. Statikaning asosiy aksiomalariga ta’rif bering.

5. Uch kuch teoremasi nimadan iborat?
6. Bog'lanishdan bo'shatish aksiomasi nimani ifodalaydi?
7. Qanday jism erksiz jism deyiladi?
8. Bog'lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
9. Absolut qattiq jism tayanadigan silliq sirtning reaksiya kuchi qanday yo'nalgan? Jismning mazkur sirtga bosimi qanday yo'naladi?
10. Arqon, zanjir va vaznsiz qattiq sterjenli bog'lanish reaksiyalari qanday yo'naladi?
11. Sferik, silindrik sharnirli bog'lanish reaksiyalari qanday bo'ladi?
12. Qistirib mahkamlangan bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishi qanday?
13. Qanday kuch to'planma kuch deyiladi?
14. Taqsimlangan kuchlarning qanday turlari bor va ular qanday aniqlanadi?
15. Juft kuch ta'rifi qanday?
16. Qanday kuchlar sistemasi ekvivalent sistema deyiladi?

II BOB. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

5-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik qo'shish

Ta'sir chiziqlari fazo (tekislik)da bir nuqtada tutashuvchi kuchlar to'plami *fazo (tekislik)dagi kesishuvchi kuchlar sistemasi* deb ataladi.

Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo'shishda parallelogramm yoki uchburchak usuli ketma-ket qo'llaniladi (27-rasm, *a, b, d*).

27-rasm, *a* da ko'rinib turibdiki:

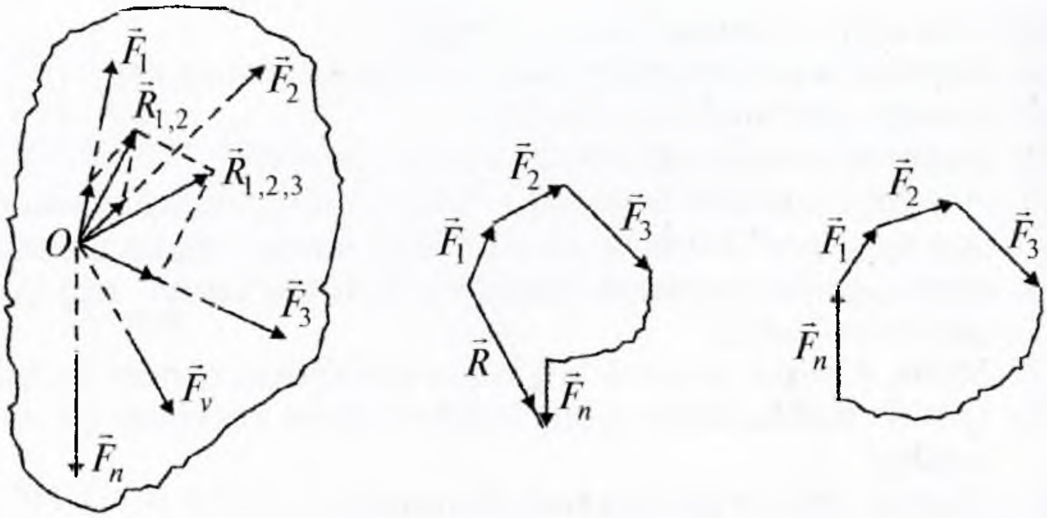
$$\overline{R_{1,2}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R} = \vec{R}_{1,2,\ldots,n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_\nu + \ldots + \vec{F}_n \quad \text{yoki} \quad \vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_\nu .$$

27-rasm, *b* dan ko'ramizki, kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi mazkur kuchlar geometrik yig'indisiga teng bo'lib, u shu kuchlardan tuzilgan ko'pburchak yopuvchisidan iborat. Bunday kuchlar muvozanatlashganda kuch ko'pburchagi yopiq bo'ladi, ya'ni $\vec{F}_n$ kuchning uchi $\vec{F}_1$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (27-rasm, *d*):

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_\nu = 0.$$



a *b* *d*

27-rasm.

6- §. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Faraz qilaylik, $\vec{F}$ kuch bilan l o'q bir tekislikda yotsin. Bu holda kuchning boshi A va oxiri B nuqtalaridan l o'qqa tushirilgan proyeksiyalar A_1 va B_1 orasidagi kesmaning mos ishorali uzunligi *kuchning l o'qdagi proyeksiyasi* deyiladi (28-rasm).

Agar A_1 nuqtadan B_1 nuqtaga ko'chish l o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat, aks holda manfiy qiymatlarga ega bo'ladi (28-rasm, *a, b*).

$\vec{F}$ kuchning l o'qidagi proyeksiyasini F_l bilan belgilasak:

$$F_l = A_1B_1, \quad A_1B_1 = AB_2. \tag{6.1}$$

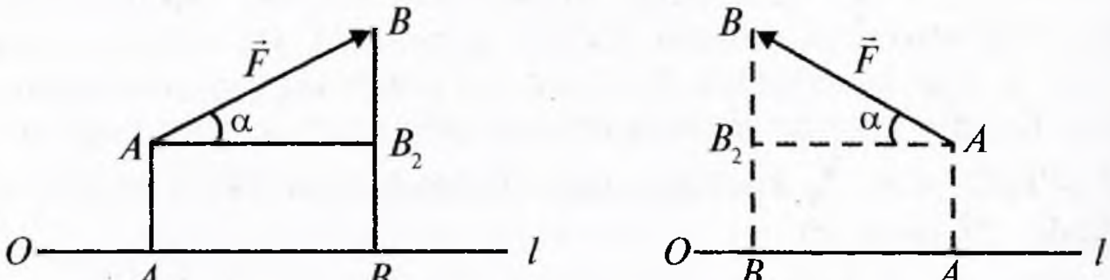
ΔABB_2 (28-rasm, *a*) dan

$$AB_2 = F \cdot \cos\alpha \tag{6.2}$$

(6.2) ni (6.1) ga qo'ysak:

$$F_l = F \cdot \cos\alpha \tag{6.3}$$

$\alpha = 0$ bo'lsa, $F_l = F$; $\alpha = 180°$ bo'lsa, $F_l = -F$; $\alpha = 90°$ bo'lsa, $F_l = 0$ bo'ladi.

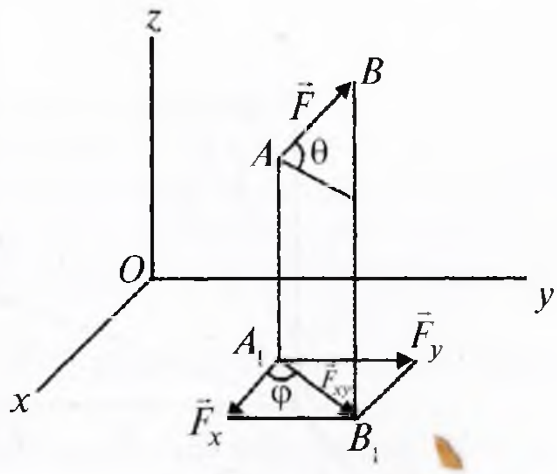


a *b*

28-rasm.

(6.3) dan ko'ramizki, kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi kuchning miqdori hamda kuchning shu o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak kosinusining ko'paytmasiga teng.

Demak, kuch o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak hosil qilsa, uning proyeksiyasi musbat; agar o'tmas burchak tashkil etsa, manfiy bo'ladi.



29-rasm.

Faraz qilaylik, $\vec{F}$ kuch x (yoki y) o'q bilan bir tekislikda yotmasin. Bu holda F kuchni avval Oxy tekisligiga proyeksiyalaymiz. Buning uchun F kuchning boshi A va oxiridagi B nuqtadan Oxy tekislikka perpendikular AA_1 va BB_1 chiziqlarni o'tkazamiz. U holda $A_1B_1=F_{xy}$ vektori mazkur kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi deb ataladi (29-rasm).

Agar F kuchning Oxy tekisligi bilan tashkil qilgan burchagi θ ga teng bo'lsa, 29-rasmdan quyidagini olamiz:

$$F_{xy} = F\cos\theta \qquad (6.4)$$

Agar F_{xy} ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{F}$ kuchning Ox, Oy, Oz o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi,$$
$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi, \qquad (6.5)$$
$$F_z = F\cos(90^\circ - \theta) = F\sin\theta$$

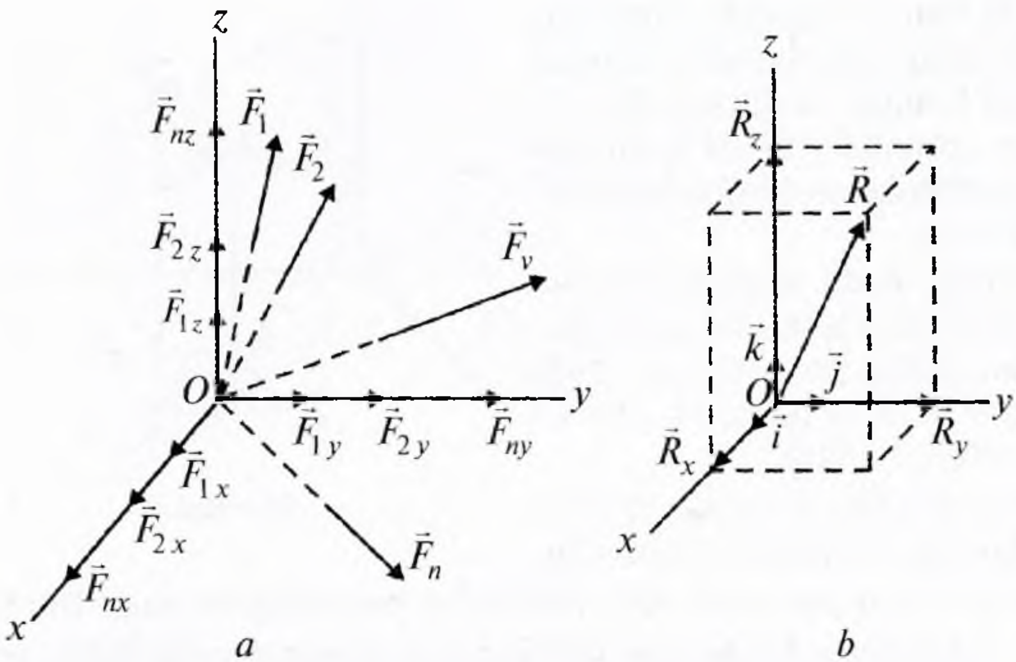
7- §. Kesishuvchi kuchlarni analitik usulda qo'shish va ularning analitik muvozanat sharti

Faraz qilaylik, jismga O nuqtada kesishuvchi kuchlar ta'sir qilsin (30-rasm, a,b).

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlarni yuqoridagilarga asoslanib, Ox, Oy, Oz o'qlariga proyeksiyalaymiz. Natijada mazkur o'qlar bo'ylab joylashgan kuchlar hosil bo'ladi. Bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar algebraik qo'shilgani uchun:

$$F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x} = R_x \,,$$

$$F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y} = R_y \,,$$



30-rasm.

$$F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu z} = R_z.$$

Endi R_x, R_y, R_z larni parallelogramm usuli bo‘yicha qo‘shsak (30-rasm, *b*):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

kelib chiqadi.

Teng ta’sir etuvchi $\vec{R}$ ning yo‘naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\vec{R}\,\hat{}\,,\vec{i}\,) = \frac{R_x}{R};\ \cos(\vec{R}\,\hat{}\,,\vec{j}\,) = \frac{R_y}{R};\ \cos(\vec{R}\,\hat{}\,,\vec{k}\,) = \frac{R_z}{R},$$

bu yerda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – mos ravishda *Ox, Oy, Oz* o‘qlarining birlik vektorlari.

Kesishuvchi kuchlar ta’siridagi jism muvozanatda bo‘lishi uchun R=0 shart bajarilishi kerak:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,$$

bundan $$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x} = 0,\ R_y = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y} = 0,\ R_z = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu z} = 0 \qquad (7.1)$$

kelib chiqadi.

Agar kesishuvchi kuchlar tekislikda joylashgan bo‘lsa (7.1) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x} = 0,\ \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y} = 0. \qquad (7.2)$$

? Nazorat savollari

1. Qanday ko'pburchak kuch ko'pburchagi deyiladi?
2. Kuch o'qda qanday proyeksiyalanadi?
3. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4. Kesishuvchi kuchlar qanday geometrik qo'shiladi?
5. Bir nuqtaga qo'yilgan kuchlarni analitik qo'shish usulini tushuntirib bering.
6. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti qanday?
7. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartlari qanday yoziladi?

III BOB. MOMENTLAR NAZARIYASI

8- §. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti

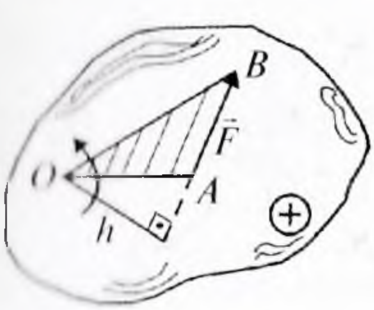
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalar yechishda kuchning nuqtaga nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi. Berilgan nuqtadan kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikular uzunligi *kuch yelkasi* deyiladi. Kuch yelkasi odatda *h* bilan belgilanadi.

$\vec{F}$ kuchning *O* nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch miqdorini uning yelkasiga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi (31, 32- rasmlar):

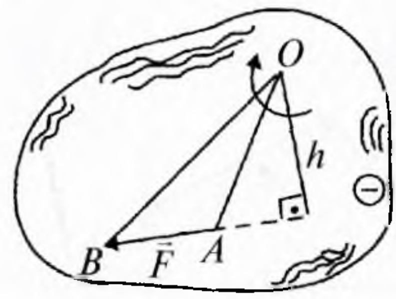
$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \qquad (8.1)$$

Kuchning momenti hisoblanadigan nuqta *moment markazi* deb ataladi.

Kuchning jismga ko'rsatadigan aylanma harakat effekti uning momenti bilan xarakterlanadi. Bu effekt kuch miqdoriga, moment markazi va kuch orqali o'tuvchi tekislikning aylanish yo'nalishiga bog'liq bo'ladi. Kuch jismni 31- rasmdagidek moment markazi atro-



31-rasm.



32-rasm.

fida soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat, soat strelkasi bo'yicha aylanadigan yo'nalishda aylantirsa, manfiy ishora bilan olinadi (32- rasm).

Kuch momenti SI birliklar sistemasida Nyuton metr (Nm) bilan o'lchanadi. Kuch momenti quyidagi xususiyatlarga ega:

1. Kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirsak, uning momenti o'zgarmaydi.

2. Kuchning ta'sir chizig'i moment markazidan o'tsa,uning mazkur nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

3. Kuchning O nuqtaga nisbatan momenti ΔOAB yuzining ikkilanganiga teng, ya'ni: $m_0(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta OAB}$.

9- §. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

Jismning biror o'q atrofidagi aylanma harakatini kuchning o'qqa nisbatan momenti xarakterlaydi.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalarni yechishda kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi.

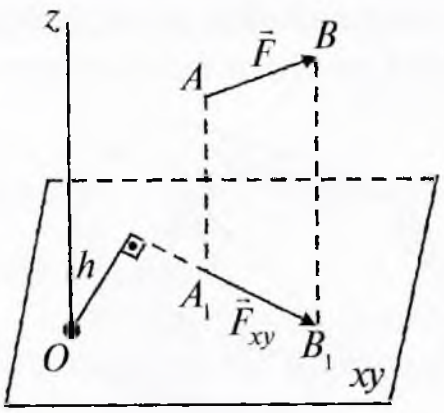
Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb, kuchning o'qqa perpendikular qilib olingan tekislikdagi proyeksiyasidan o'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasiga nisbatan olingan momentiga aytiladi (33-rasm).

Kuchning o'qqa nisbatan momentining matematik ifodasi

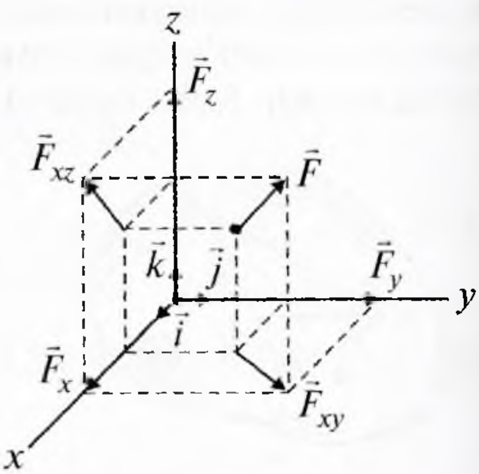
$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (9.1)$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar x, y, z bilan kuch qo'yilgan A nuqtaning koordinatalarini: F_x, F_y, F_z orqali $\vec{F}$ kuchning koordinata o'qlariga proyeksiyalarini belgilasak (34-rasm), u holda kuchning o'qqa nisbatan momentining analitik ifodasi quyidagicha bo'ladi:



33-rasm.



34-rasm.

$$m_x(F) = yF_z - zF_y,$$
$$m_y(F) = zF_x - xF_z, \qquad (9.2)$$
$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

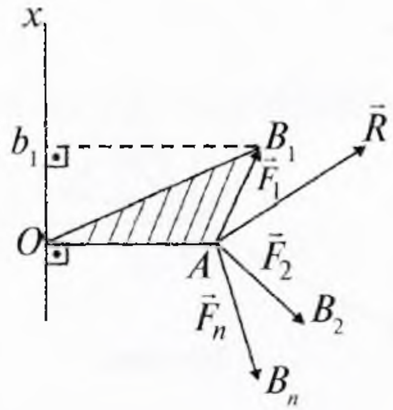
Agar kuchning ta'sir chizig'i o'qqa parallel yoki o'qni kesib o'tsa, uning mazkur o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

10-§. Kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi

Teorema. Kesishuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisidan biror nuqtaga nisbatan olingan moment uning tuzuvchi kuchlaridan mazkur nuqtaga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$m_0(\vec{R}) = \sum_{\nu=1}^{n} m_0(\vec{F}_\nu). \qquad (10.1)$$

Faraz qilaylik, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ kuchlar A nuqtaga qo'yilgan bo'lib, ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{R}$ bo'lsin (35-rasm).



35-rasm.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu. \qquad (10.2)$$

Kuchlar qo'yilgan A nuqtani moment markazi O bilan tutashtirib, OA ga perpendikular Ox o'qni o'tkazamiz. Ox o'qning musbat yo'nalishini shunday tanlab olamizki, ixtiyoriy kuchning mazkur o'qdagi proyeksiyasining ishorasi shu kuchning O markazga nisbatan olingan momenti ishorasi bilan bir xilda bo'lsin.

Kuch momentining uchinchi xususiyatidan foydalanib, kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentini aniqlaymiz:

$$m_0(\vec{F}_1) = 2S_{\Delta OAB_1};\ m_0(\vec{F}_2) = 2S_{\Delta OAB_2};\ ...;\ m_0(\vec{F}_n) = 2S_{\Delta OABn}.$$

35-rasmdan: $$m_0(\vec{F}_1) = OA \cdot Ob_1 = OA \cdot F_{1x}. \qquad (10.3)$$

(10.2) tenglikni Ox o'qiga proyeksiyalasak:

$$R_x = \sum F_{\nu x}. \qquad (10.4)$$

(10.4) ning ikki tomonini OA ga ko'paytiramiz:

$$OA \cdot R_x = \sum OA \cdot F_{\nu x}.$$

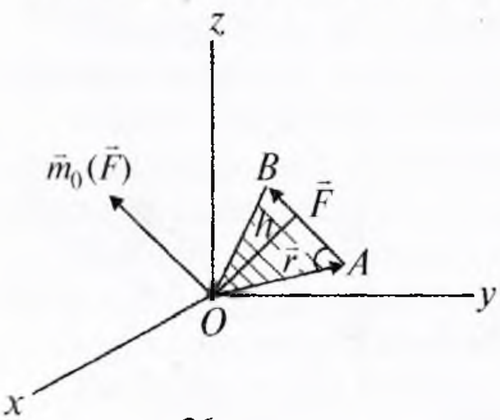
(10.3) ga asosan:

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_v).$$

Demak, kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi isbotlandi.

11- §. Kuchning nuqtaga nisbatan momentining vektorligi

Yuqoridagi 6-mavzuda kuchning nuqtaga nisbatan momentini algebraik miqdor (kattalik), ya'ni u kuch miqdori bilan yelkasi uzunligining ko'paytmasidan iborat deb qaragan edik. Lekin jismga ta'sir qilayotgan kuch fazoda joylashgan bo'lsa, mazkur kuch momentining moduli va ishorasi jismning aylanma harakatini to'liq xarakterlay olmaydi. Shuning uchun kuchning nuqtaga nisbatan mometining vektori tushunchasi kiritiladi.



36-rasm.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorini ikkita vektorning vektor ko'paytmasidan iborat deb qarash mumkin. Buning uchun moment markazi O nuqtani sanoq sistemasining boshi desak, $\vec{r}$ kuch qo'yilgan A nuqtaning radius-vektori bo'ladi (36-rasm).

ΔOAB dan:

$$h = r \cdot \sin(\vec{r}\,\hat{}\,,\vec{F}). \quad (11.1)$$

(11.1) ni (8.1) ga qo'ysak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}\,\hat{}\,,\vec{F}) \quad \text{yoki} \quad \vec{M}_0 = \vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (11.2)$$

Demak, kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor miqdor bo'lib, u kuch qo'yilgan nuqtaning radius-vektori bilan kuchning vektor ko'paytmasiga teng bo'lib, u kuch va moment markazi orqali hosil qilingan uchburchak yuziga perpendikular yo'naladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorining yo'nalishi shunday qo'yiladiki, uning uchidan turib qaralganda kuch jismni soat strelkasiga qarshi aylantirayotgan bo'lishi kerak.

(11.2) dan foydalanib, $\vec{M}_0$ ni analitik hisoblash mumkin. *Ox, Oy, Oz* o'qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{F}$; kuch proyeksiyalarini F_x, F_y, F_z; $\vec{r}$ ning proyeksiyalarini x, y, z; $\vec{M}_0$ ning proyeksiyalarini esa M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} desak:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{M}_0 = M_{0x}\vec{i} + M_{0y}\vec{j} + M_{0z}\vec{k}.$$

Vektorlar algebrasiga ko‘ra:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{11.3}$$

bundan

$$\begin{aligned} M_{0x} &= yF_z - zF_y, \\ M_{0y} &= zF_x - xF_z, \\ M_{0z} &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{11.4}$$

kelib chiqadi.

(11.4) dan foydalanib M_0 modulini va yo‘naltiruvchi kosinuslarini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{M}_0 \hat{,} \vec{i}) &= M_{0x}/M_0, \\ \cos(\vec{M}_0 \hat{,} \vec{j}) &= M_{0y}/M_0, \\ \cos(\vec{M}_0 \hat{,} \vec{k}) &= M_{0z}/M_0. \end{aligned} \tag{11.6}$$

(9.2) bilan (11.4) ni taqqoslash natijasida nuqtaga nisbatan kuch momentining biror o‘qdagi proyeksiyasi mazkur kuchning shu o‘qqa nisbatan momentiga tengligini ko‘ramiz.

? *Nazorat savollari*

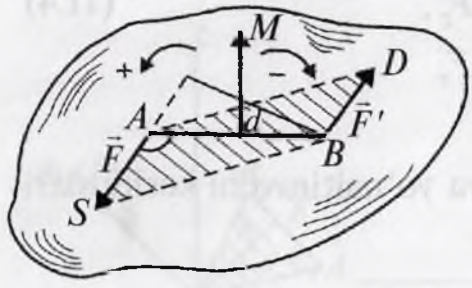
1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi? Mazkur momentning ishorasi qanday tanlanadi?
2. Qanday holda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo‘ladi?
3. Kuchning o‘z ta’sir chizig‘i bo‘ylab ko‘chirilganda uning momenti qanday o‘zgaradi?
4. Kuchning o‘qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Qanday holda kuchning o‘qqa nisbatan momenti nolga teng bo‘ladi?
6. Nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan o‘qqa nisbatan kuch momenti orasida qanday munosabat bor?

7. Nuqtaga nisbatan kuch momentining vektorligini tushuntirib bering.
8. O‘qqa nisbatan kuch momentining analitik ifodasi qanday yoziladi?
9. Varinon teoremasini ta’riflang.

IV BOB. JUFT KUCHLAR NAZARIYASI

12- §. Juft kuch. Juft kuch momenti

Ma’lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qarama-qarshi yo‘nalgan va miqdor jihatidan teng bo‘lgan ikki kuch juft kuch deb ataladi. U $(\vec{F}, \vec{F}')$ bilan belgilanadi (37-rasm).



37-rasm.

Juft kuchning teng ta’sir etuvchisi bo‘lmaydi va juft kuchni tashkil qiluvchi kuchlar muvozanatlashmaydi. Demak, juft kuch teng ta’sir etuvchisi bo‘lmagan va muvozanatlashmaydigan kuchlar sistemasidan iborat.

Juft kuchni tuzuvchi kuchlarning ta’sir chizig‘i orqali o‘tkazilgan tekislik *juft kuch tekisligi* deyiladi. Juft kuchni tuzuvchi kuchlar orasidagi eng qisqa masofa *juft kuch yelkasi* deb ataladi va u *d* bilan belgilanadi (37-rasm).

Juft kuchni tuzuvchi kuchlardan biri bilan juft kuch yelkasining ko‘paytmasi *juft kuch momenti* deyiladi. U quyidagicha yoziladi:

$$M = \pm Fd. \qquad (12.1)$$

Juft kuch jismni soat strelkasiga teskari yo‘nalishda aylantirsa, uning momenti musbat, aks holda manfiy deb olinadi.

13- §. Juft kuch momentining vektorligi

Juft kuchning jismga ta’siri asosan uch omil bilan aniqlanadi:
1. Juft kuch momentining miqdori.
2. Juft kuchning ta’sir tekisligi.
3. Mazkur tekislikning burilish yo‘nalishi.

Bir tekislikda yotmaydigan juft kuchlarni kuzatganimizda, har bir juft kuchning jismga ta’sirini aniqlash uchun yuqoridagi uchta omil bo‘lishi zarur. Mazkur omilni fazoda bitta vektor, ya’ni juft kuch momentining vektori orqali ifodalash mumkin.

Moduli (12.1) orqali aniqlanadigan vektor juft kuch momentining vektori deyiladi. U juft kuch tekisligiga perpendikular bo‘lib, uning uchidan qaralganda jism har doim soat strelkasiga teskari yo‘nalishda aylanadi (37-rasm).

Juft kuch momentining vektorini ikkita vektorning vektor ko‘paytmasidan iborat deb qarash mumkin:

$$\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{F}' = \overline{BA} \times \vec{F}. \qquad (13.1)$$

Darhaqiqat,

$$|\overline{BA} \times \vec{F}| = BA \cdot F \cdot \sin(\overline{BA}\,\hat{}\,,\vec{F}). \qquad (13.2)$$

34-rasmdan: $\sin(\overline{BA}\,\hat{}\,,\vec{F}) = d/AB$, (13.3)

bundan $d = AB \cdot \sin(\overline{BA}\,\hat{}\,,\vec{F})$. (13.4)

(13.4) ni (13.2) ga qo‘ysak, (12.1) kelib chiqadi.

Demak, (13.1) vektor ko‘paytma juft kuch yotgan tekislikka perpendikular bo‘ladi, ya’ni juft kuch momentining vektoridan iborat.

14- §. Juft kuch momentining vektoriga oid teoremalar

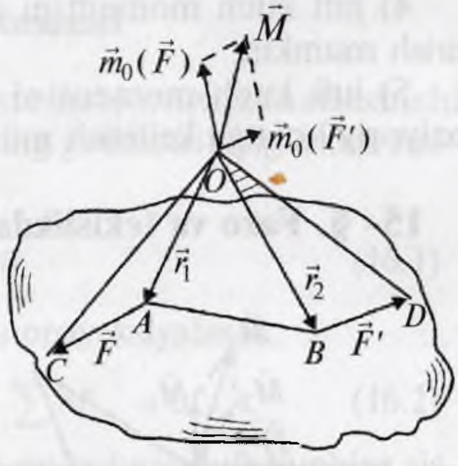
***1-teorema.** Juft kuch momentining vektori uni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisiga teng.*

Isbot. Faraz qilaylik, jismga $(\vec{F},\vec{F}')$ juft kuch qo‘yilgan bo‘lsin. Bu juft kuchning tashkil etuvchilarining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlaymiz (38-rasm).

(11.2) ga ko‘ra:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F},$$

$$\vec{m}_0(\vec{F}') = \vec{r}_2 \times \vec{F}'. \qquad (14.1)$$



38-rasm.

(14.1) ni hadma-had qo‘shsak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}'. \qquad (14.2)$$

$\vec{F} = -\vec{F}'$ bo‘lgani uchun (14.2) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

yoki $m_0(\vec{F}) + m_0\vec{F}' = \overline{BA} \times \vec{F}$ (14.3)

(14.3) ni (13.1) bilan taqqoslasak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = \vec{M}. \qquad (14.4)$$

Shu bilan teorema isbotlandi.

2-teorema. *Juft kuch momenti vektori – erkin vektordir.*

Isbot. Teoremani isbotlash uchun (14.4) dan foydalanamiz. 11-mavzudan bilamizki, nuqtaga nisbatan kuch momentining vektori kuch va moment markazi orqali tuzilgan uchburchak yuziga perpendikulardir. Shunga ko'ra, $\vec{m}_0(\vec{F})$ ΔOAC yuzaga, $\vec{m}_0(\vec{F}')$ esa ΔOBD yuzaga perpendikular yo'naladi (38-rasm).

(14.4) ga ko'ra mazkur vektorlarning geometrik yig'indisi juft kuch momenti vektoridan iborat bo'lib, u O nuqtaga qo'yilgan. O nuqta ixtiyoriy bo'lgani uchun $\vec{M}$ ni ham fazoning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yish mumkin.

Demak, juft kuch momentining vektori $\vec{M}$ erkin vektordir.

Yuqoridagilardan foydalanib, juft kuch momentining quyidagi xususiyatlarini ta'riflash mumkin:

1) juft kuchni tuzuvchilarini o'z ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirsak, juft kuch momenti o'zgarmaydi.

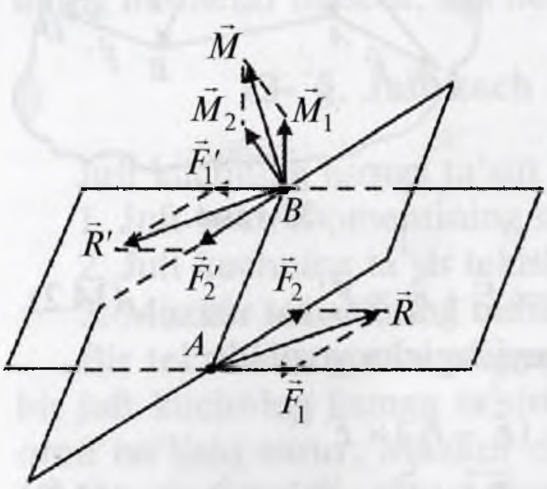
2) juft kuch momenti juft kuchlarni tashkil etuvchilarga qurilgan $ACBD$ parallelogramning yuziga teng: $M = S_{\square ABCD}$ (37-rasm);

3) juft kuchning o'zini ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan tekislikka ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi;

4) juft kuch momentini o'zgartirmay, uni ixtiyoriy yelkaga keltirish mumkin;

5) juft kuch momentini o'zgartirmay, uni o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.

15- §. Fazo va tekislikda joylashgan juft kuchlarni qo'shish



39-rasm.

Faraz qilaylik, $(\vec{F}, \vec{F}_1')$ va $(\vec{F}, \vec{F}_2')$ juft kuchlar ikkita kesishuvchi tekislikda joylashgan bo'lsin (39-rasm).

Yuqoridagi keltirilganlardan foydalanib, ikkala juft kuchni AB yelkaga keltiramiz. Bu holda A nuqtada $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$, B nuqtada esa $\vec{F}_1'$ va $\vec{F}_2'$ kuchlar hosil bo'ladi. A va B nuqtadagi kuchlarni qo'shsak:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\ \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'. \qquad (15.1)$$

(13.1) ga ko'ra:

$$\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{R}. \qquad (15.2)$$

(15.1) ni (15.2) ga qo'yamiz: $\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{F}_1 + \overline{BA} \times \vec{F}_2$,

bunda $\qquad \overline{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1,\ \overline{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2.$

Natijada

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \qquad (15.3)$$

Agar juft kuchlar n ta bo'lsa, (15.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{M} = \sum_{1}^{n} \vec{M}_\nu. \qquad (15.4)$$

Demak, fazoda joylashgan juft kuchlar bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Agarda juft kuchlar tekislikda joylashgan bo'lsa, ular bitta juft kuchga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng:

$$M = \sum_{1}^{n} M_\nu.$$

16- §. Fazoda va tekislikda joylashgan juft kuchlar sistemasining muvozanati

Fazoda joylashgan juft kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun mazkur juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

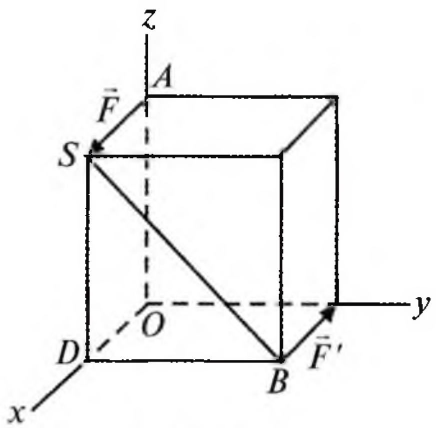
$$\vec{M} = \sum \vec{M}_\nu = 0. \qquad (16.1)$$

(16.1) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$\sum M_{\nu x} = 0,\ \sum M_{\nu y} = 0,\ \sum M_{\nu z} = 0. \qquad (16.2)$$

(16.2) dan ko'rinib turibdiki, fazoda joylashgan juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun juft kuchlar momentlari vektorlarining har bir koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak. Agarda juft kuchlar tekislikda joylashgan bo'lsa, ular momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum M_\nu = 0. \qquad (16.3)$$



40-rasm.

Masala. Qirralarining uzunligi 1 m bo‘lgan kubga juft kuch qo‘yilgan. Bu juft kuch momentining moduli aniqlansin (40-rasm). $F = F' = 2$ N.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra: $SD = DB = 1$ m.

ΔBSD dan: $SB = \sqrt{BD^2 + SD^2}$ yoki $SB = d = \sqrt{2}$ m.

(12.1) ga asosan, $M = F \cdot d = 2\sqrt{2}$ N.

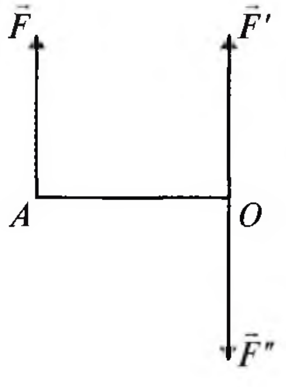
? *Nazorat savollari*

1. Juft kuch va juft kuch momenti nima?
2. Juft kuch momenti vektori qanday yo‘nalgan va uning miqdori nimaga teng?
3. Qanday shart bajarilganda ikkita juft kuch ekvivalent bo‘ladi?
4. Fazoda joylashgan juft kuchlar qanday qo‘shiladi?
5. Tekislikda joylashgan juft kuchlar qanday qo‘shiladi?
6. Juft momenti erkin vektorligi haqidagi teoremani ta’riflang.
7. Fazodagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?
8. Tekislikdagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?

V BOB. IXTIYORIY KUCHLAR SISTEMASI

17- §. Kuchni berilgan markazga keltirish

Ta’sir chiziqlari fazo (tekislik)da ixtiyoriy joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema *fazo (tekislik)dagi ixtiyoriy kuchlar sistemasi* deyiladi. Ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta’siridagi jism holatini yoki muvozanatini tekshirish uchun mazkur kuchlar sodda holga keltiriladi.



41-rasm.

Puanso lemmasi. Kuchni bir nuqtadan berilgan markazga keltirish natijasida, keltirish markazida shu kuchga teng bo‘lgan kuch va uning qo‘shilgan jufti hosil bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo‘yilgan bo‘lsin (41-rasm). Bu kuchni ixtiyoriy O nuqtaga parallel ko‘chirish uchun 3-aksiomaga ko‘ra mazkur nuqtaga $(\vec{F}', \vec{F}'') \Leftrightarrow 0$ kuchni qo‘yamiz. Bunda $F' = F'' = F$.

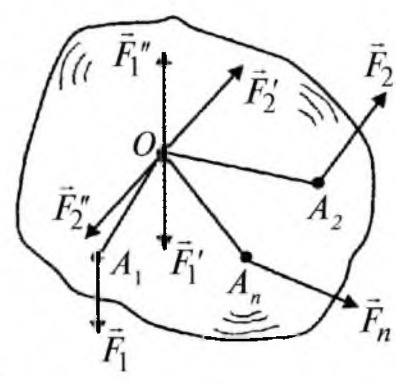
Natijada: $\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ yoki $\vec{F} \Leftrightarrow \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\}$.

Bu yerda $(\vec{F}, \vec{F}'')$ qo'shilgan juft kuchlar deyiladi. Mazkur kuchning momenti (11.2) ga ko'ra quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \overline{AO} \times \vec{F} \quad \text{yoki} \quad \vec{M} = \vec{m}_0(\vec{F}).$$

Demak, $\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}', \vec{M}) = (\vec{F}, \vec{M})$. Shu bilan lemma isbotlanadi.

18- §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish



42-rasm.

Faraz qilaylik, jismga $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin. 17-§ ga asoslanib, Puanso lemmasini qo'llaymiz (42-rasm).

Natijada O nuqtada $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ kuchlar, $\{\vec{m}_0(\vec{F}_1) = \vec{M}_1, \vec{m}_0(\vec{F}_2) = \vec{M}_2, ..., \vec{m}_0\vec{F}_n) = \vec{M}_n\}$ qo'shilgan juft kuchlar hosil bo'ladi. Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlarning ta'sir chiziqlari fazoda bo'lsa, $(\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, ..., \overrightarrow{M_n})$ juft kuch momenti vektorlari geometrik; tekislikda bo'lsa, algebraik qo'shiladi. 15-§ dan ma'lumki, $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ kuchlar kesishuvchi kuchlar sistemasi bo'lgani uchun ular geometrik qo'shiladi.

Natijada:
$$\vec{R}' = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu', \quad \vec{M} = \sum_{\nu=1}^{n} \overrightarrow{M_\nu}, \tag{18.1}$$

Bunda $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n' = \vec{F}_n$ bo'lgani uchun (18.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

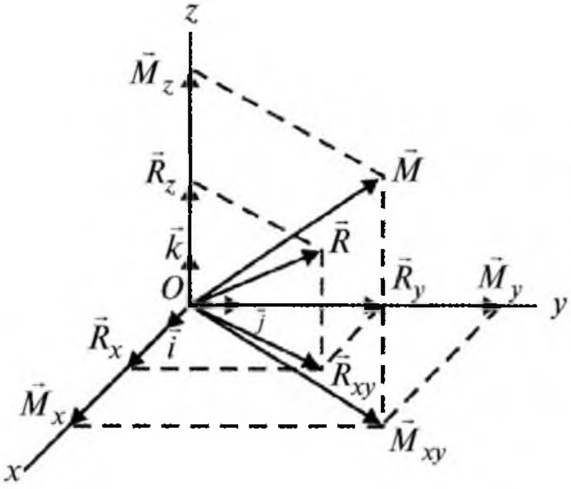
$$\vec{R} = \sum \vec{F}_\nu, \vec{M} = \sum \overrightarrow{M_\nu}. \tag{18.2}$$

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, (18.2) ni shunday yozamiz:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_\nu, \; M = \sum M_\nu = \sum m_0(\vec{F}_\nu). \tag{18.3}$$

(18.2) va (18.3) ifodalardagi $\vec{R}$ kuchlar sistemasining *bosh vektori*, $\vec{M}$ esa *bosh moment* deyiladi.

Demak, ixtiyoriy kuchlarni berilgan markazga keltirish orqali bitta bosh vektor va bitta bosh moment hosil bo'ladi (43-rasm).



43-rasm.

Bosh vektor va bosh momentni analitik usulda quyidagicha hisoblash mumkin:

$$R_x = \sum F_{vx}, R_y = \sum F_{vy}, R_z = \sum F_{vz},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (18.4)$$

$$\cos(\vec{R}\hat{\ },\vec{i}) = \frac{R_x}{R},\ \cos(\vec{R}\hat{\ },\vec{j}) = \frac{R_y}{R},$$

$$\cos(\vec{R}\hat{\ },\vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_v),\ M_y = \sum m_y(\vec{F}_v), M_z = \sum m_z(\vec{F}_v),$$

$$M = \sqrt{M^2{}_x + M_y^2 + M_z^2}; \qquad (18.5)$$

$$\cos(\overrightarrow{M}\hat{\ },\vec{i}) = \frac{M_x}{M},\ \cos(\overrightarrow{M}\hat{\ },\vec{j}) = \frac{M_y}{M},\ \cos(\overrightarrow{M}\hat{\ },\vec{k}) = \frac{M_z}{M}.$$

Bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchakni aniqlash uchun bu vektorlarni skalyar ko‘paytiramiz:

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = R \cdot M \cdot \cos\varphi$$

yoki

$$\cos\varphi = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}} \qquad (18.6)$$

kelib chiqadi.

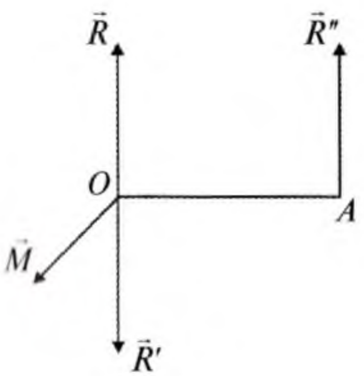
19- §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini sodda holga keltirish

Ixtiyoriy kuchlarni sodda holga keltirishda quyidagi hollarni ko‘ramiz:

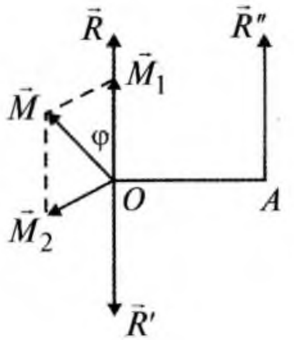
1. Bosh vektor $\vec{R} = 0$, bosh moment $\vec{M} \neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh momentga keltiriladi.

2. Agar bosh moment $\vec{M} = 0$, bosh vektor $\vec{R} \neq 0$ bo‘lsa, kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi.

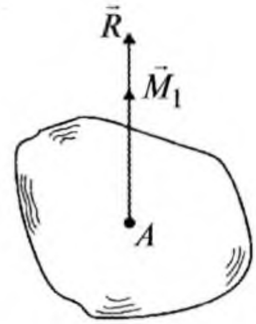
3. Bosh vektor $\vec{R} \neq 0$ hamda bosh moment $\vec{M} \neq 0$ bo‘lib, ular o‘zaro $(\overrightarrow{R} \perp \overrightarrow{M})$ perpendikular bo‘lganda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh vektorga keltiriladi.



44-rasm.



45-rasm.



46-rasm.

Haqiqatan ham, bu holni to‘g‘riligini ko‘rsatish uchun bosh momentning tashkil etuvchilarni shunday o‘zgartiramizki, $R' = R'' = R$ bo‘lib, $\vec{R}'$ esa bosh vektor $\vec{R}$ yo‘nalgan chiziq bo‘yicha unga qarama-qarshi yo‘nalsin (44-rasm).

Bu holda $(\vec{R}, \vec{R}') \Leftrightarrow 0$ bo‘lib, O nuqtadan $AO=M/R$ masofada $\vec{R}'' = \vec{R}$ joylashadi. Demak, A nuqtada bitta bosh vektor hosil bo‘ladi.

4. Bosh vektor bilan bosh moment bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab joylashsa,bunday hol *dinamo (dinamik vint)* deyiladi.

Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo‘lmay va ular perpendikular bo‘lmasa, kuchlar sistemasi dinamoga keltiriladi. Buning to‘g‘riligini isbotlash uchun bosh momentni tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu tashkil etuvchilardan biri bosh vektor bo‘ylab, ikkinchisi bosh vektorga perpendikular bo‘lsin (45-rasm).

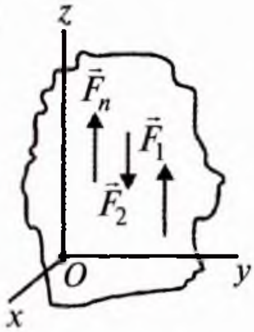
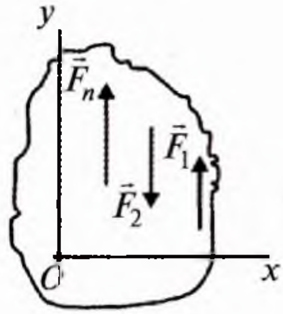
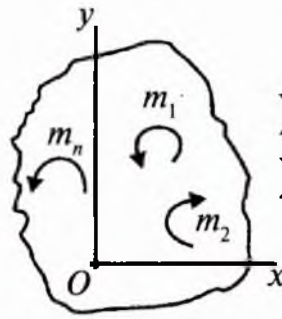
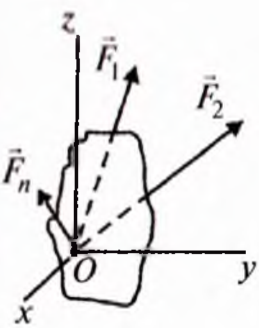
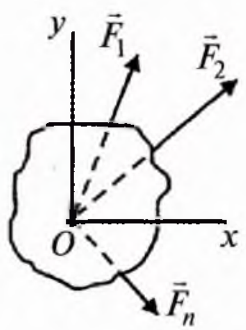
Endi $\vec{R}$ bilan $\vec{M}_2$ ga 3-holni qo‘llasak, O nuqtadan $AO = M \cdot \sin\varphi / R$ masofada bosh vektor $\vec{R}'' = \vec{R}$ hosil bo‘ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy kuchlar sistemasining O nuqtadagi momenti $M{\cdot}\cos\varphi$ bo‘lgan $\vec{M}_1$ juft kuch momenti vektoriga hamda A nuqtadagi bosh vektorga keltiriladi. Juft kuchning momenti vektori erkin bo‘lgani uchun $\vec{M}_1$ ni A nuqtaga ko‘chirish mumkin. Demak, kuchlar sistemasi dinamoga keltirildi (46-rasm).

$\vec{M}_1$ va $\vec{R}$ vektorlar yo‘nalgan o‘q markaziy vint o‘qi deyiladi.

5. Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo‘lsa, ixtiyoriy kuchlar sistemasi muvozanatlashadi.

20- §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

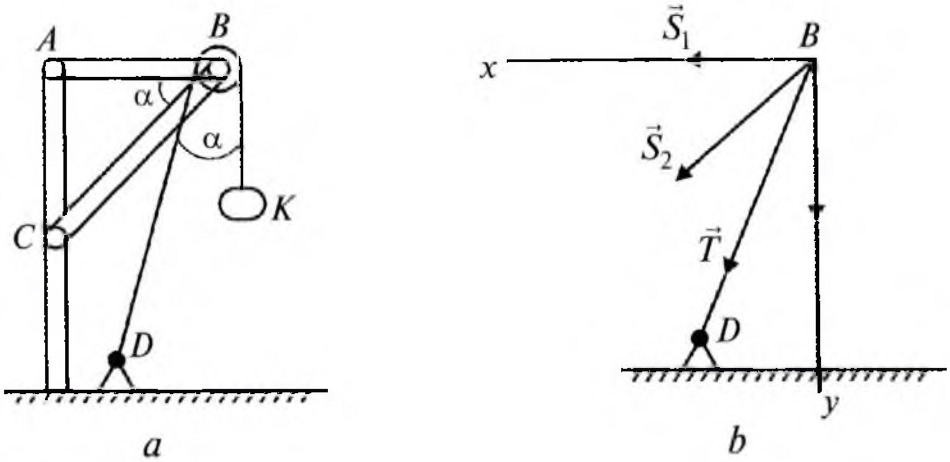
Fazoda joylashgan ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta’siridagi jism muvozanatda bo‘lishi uchun bu kuchlarning bosh vektori hamda bosh momenti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir:

Parallel	 $\sum F_{vz}=0,$ $\sum m_x(\vec{F}_v)=0,$ $\sum m_y(\vec{F}_v)=0.$	 $\sum F_{vy}=0,$ $\sum m_0(\vec{F}_v)=0.$
Juft	 $\sum m_x(\vec{F}_v)=0,$ $\sum m_y(\vec{F}_v)=0,$ $\sum m_z(\vec{F}_v)=0.$	 $\sum M_v=0$ yoki $\sum m_0(\vec{F}_v)=0.$
Kesishuvchi	 $\sum F_{vx}=0,$ $\sum F_{vy}=0,$ $\sum F_{vz}=0.$	 $\sum F_{vx}=0,$ $\sum F_{vy}=0.$

22- §. Masalalar

1-masala. Og‘irligi $G = 2$ N bo‘lgan K yukni B blokdan o‘tkazilgan arqon yordamida D chig‘ir ushlab turadi. Blokdagi ishqalanishni hisobga olmay AB va BC bruslar zo‘riqishi aniqlansin. $\angle ABC=\angle DBK=\alpha=30°$ (47-rasm).

Yechish. B tugun muvozanatini tekshiramiz. Buning uchun (47-rasm, *b*) dagidek Bxy koordinata sistemasini tanlab olamiz. B tugunga K yukning og‘irligi (aktiv kuch) qo‘yilgan, uni bog‘lanishdan qutqaramiz. Bog‘lanishlar AB, BC sterjenlar hamda BD arqondan iborat. Ularning reaksiyalari mos ravishda $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ va $\vec{T}$. Sterjenlar cho‘zilayapti deb faraz qilamiz. 47-rasm, *b* dan ko‘rinib turibdiki, B tugundagi kuchlar tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasidir. Ularning muvozanat sharti quyidagicha:



47-rasm.

$$\sum F_{vx} = 0;\ S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha + T \cdot \sin\alpha = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0;\ S_2 \cdot \sin\alpha + T \cdot \cos\alpha + G = 0. \qquad (22.1)$$

(22.1) dan:

$$S_2 = -\frac{G + T \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (22.2)$$

$$S_1 = -S_2 \cdot \cos\alpha - T \cdot \sin\alpha.$$

(22.2) ga son qiymatlarni qo‘ysak:

$$S_1 = 5{,}45\ \text{N},\ S_2 = -7{,}46\ \text{N} \qquad (22.3)$$

kelib chiqadi.

Bu yerda (+) ishora sterjen cho‘zilishini, (–) ishora esa siqilishini bildiradi.

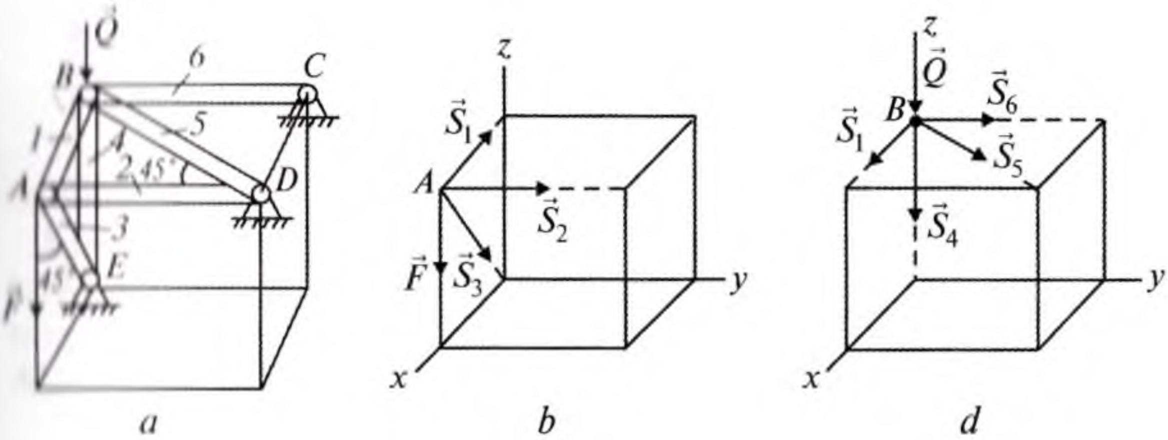
2-masala. Sterjenli sistema bir-biri bilan sharnirli bog‘langan 6 ta sterjendan iborat. *A* tugunga $\vec{F}$ kuch, *B* tugunga $\vec{Q}$ kuch qo‘yilgan. Sterjenlar zo‘riqishi aniqlansin. Ularning og‘irligi hisobga olinmasin (48-rasm). *C, D, E* nuqtalar qo‘zg‘almas sharnirli tayanchlardir.

48-rasm, *a* da ko‘rsatilgan sistema muvozanatini tekshirish uchun *A* va *B* tugunlar muvozanatini alohida-alohida tekshiramiz.

A tugunga $\vec{F}$ kuch, 1, 2 va 3- sterjenlarning zo‘riqishlari ta’sir qiladi. Ular fazoda joylashgan kesishuvchi kuchlar sistemasidan iborat. Sanoq sistemasini 48-rasm, *b* dagidek tanlab, fazodagi kesishuvchi kuchlarning muvozanat shartlarini tuzamiz:

$$\sum F_{vx} = 0;\ -S_3 \cdot \cos 45^\circ - S_1 = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0;\ -S_2 = 0, \qquad (22.4)$$
$$\sum F_{vz} = 0;\ -F - S_3 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

(22.4) dan:



48-rasm.

$$S_1 = F,\ S_2 = 0,\ S_3 = -F \cdot \sqrt{2}$$

kelib chiqadi.

Endi B tugunga qo'yilgan $\vec{Q}, \vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ kuchlarning muvozanat shartlarining tenglamalarini tuzamiz (48-rasm, *d*):

$$\begin{aligned} &\sum F_{vx} = 0;\ S_1 + S_5 \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ &\sum F_{vy} = 0;\ S_6 + S_5 \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ &\sum F_{vz} = 0;\ -Q - S_4 = 0. \end{aligned} \tag{22.5}$$

(22.5) ni yechsak,

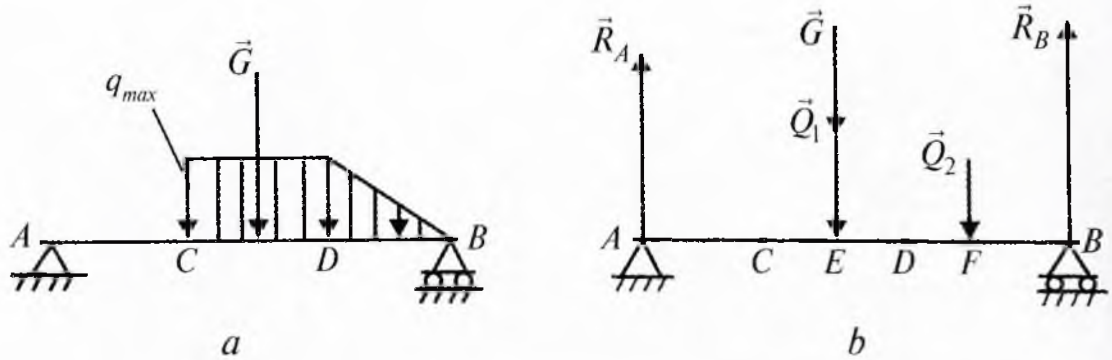
$$S_4 = -Q,\ S_5 = -F\sqrt{2},\ S_6 = F$$

hosil bo'ladi.

3-masala. *AB* balkaga intensivligi q_{max}=2 kN/m bo'lgan tekis taqsimlangan yuk qo'yilgan. *AB* balkaning *A* va *B* tayanchlaridagi reaksiyalari aniqlansin. $a = b = c = 2$ m. *AB* balka og'irligi G=4 kN (49-rasm, *a*).

Yechish. Masalani yechish uchun avval *CD* va *DB* qismlarga qo'yilgan tekis taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisini topamiz. *CD* qismdagi tekis taqsimlangan yuk teng ta'sir etuvchisining moduli $Q_1 = q_{max} \cdot CD$, ya'ni Q_1=4 kN bo'lib, u *CD* ning o'rtasiga qo'yilgan; $CE = CD/2$ yoki CE=1 m. *DB* qismdagi tekis taqsimlangan yuk teng ta'sir etuvchisining moduli $Q_2 = q_{max} \cdot DB/2$, ya'ni, $Q_2 = 2$ kN. U $DF = \frac{DB}{3} = \frac{2}{3}$ m bo'lgan *F* nuqtaga qo'yilgan (49-rasm, *b*).

Endi *AB* balka muvozanatini tekshiramiz (49-rasm, *b*). Balkaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda joylashgan parallel kuchlar sistemasidan iborat. Ularning muvozanat sharti tenglamalarini tuzamiz:



49-rasm.

$$\sum F_{vy} = 0;\; R_A - Q_1 - G + R_B - Q_2 = 0,$$

$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0;\; -Q_1 \cdot AE - Q_2 \cdot AF - G \cdot \frac{AB}{2} + R_B \cdot AB = 0. \quad (22.6)$$

49-rasm, b dan:

$AE = AC + CE$, $AE = 2+1 = 3$ m, $AF = AD + DF$, $AF = 4 + 2/3 = 14/3$ m.

(22.6) ga son qiymatlarni qo'ysak,

$$R_A = 4{,}44 \text{ kN}, \quad R_B = 5{,}56 \text{ kN}$$

ekanligi kelib chiqadi.

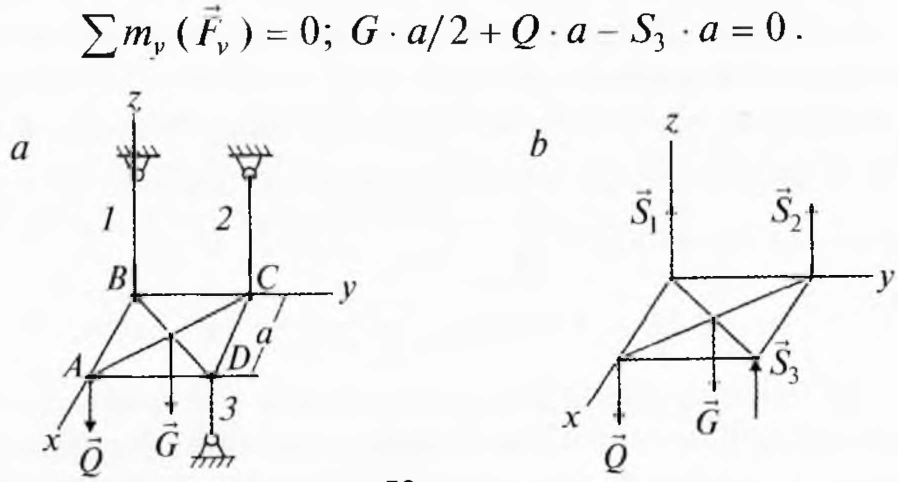
4-masala. Og'irligi G = 115 N bo'lgan $ABCD$ kvadrat plastinka 3 ta sterjen yordamida gorizontal holda ushlab turiladi. A nuqtaga Q = 185 N kuch qo'yilgan. Sterjenlardagi zo'riqish aniqlansin (50-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 50-rasm, b dagidek tanlaymiz. Sterjenlar reaksiyasini mos ravishda $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ va $\vec{S}_3$ deb olamiz. $ABCD$ plastinkaga ta'sir etuvchi kuchlar Oz o'qiga parallel joylashgan. Ularning muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\sum F_{vz} = 0;\; S_1 + S_2 + S_3 - Q - G = 0, \quad (22.7)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_v) = 0;\; -G \cdot a/2 + S_2 \cdot a + S_3 \cdot a = 0, \quad (22.8)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_v) = 0;\; G \cdot a/2 + Q \cdot a - S_3 \cdot a = 0. \quad (22.9)$$



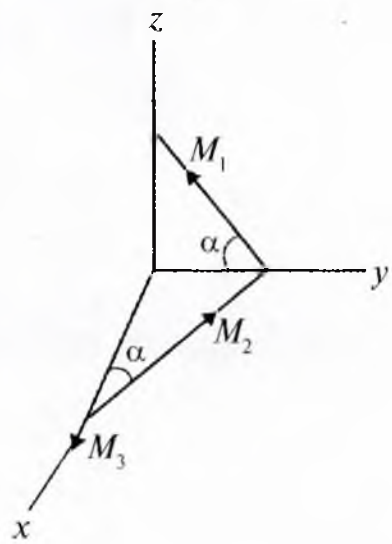
50-rasm.

(22.9) dan: $S_3 = G/2 + Q$, $S_3 = 115/2 + 185 = 242{,}5$ N.

(22.7) va (22.8) dan: $S_1 = Q + G - S_2 - S_3$, $S_2 = \frac{G}{2} - S_3$.

Son qiymatlarni qo'ysak: $S_1 = 242{,}5$ N, $S_2 = -185$ N, $S_3 = 242{,}5$ N.

5-masala. 51-rasmda ko'rsatilgan juft kuch momentlarining teng ta'sir etuvchisining moduli topilsin. $M_1 = M_2 = 1$ Nm, $M_3 = 0{,}707$ Nm, $\alpha = 45°$.



51-rasm.

Yechish. 48-rasmda ko'rsatilgan juft kuch momentlari fazoda joylashgan. Bizga ma'lumki, fazodagi juft kuch momentlarining geometrik yig'indisi ularning bosh momentidan iborat edi. Juft kuch momentlarini Ox, Oy, Oz o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$M_x = -M_2 \cdot \cos\alpha + M_3,$$
$$M_y = -M_1 \cdot \cos\alpha + M_2 \cdot \sin\alpha,$$
$$M_z = M_1 \cdot \sin\alpha.$$

Son qiymatlarni qo'ysak:

$$M_x = 0,\ M_y = 0,\ M_z = 0{,}707 \text{ Nm}.$$

Natijada,

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},\ M = 0{,}707 \text{ Nm}$$

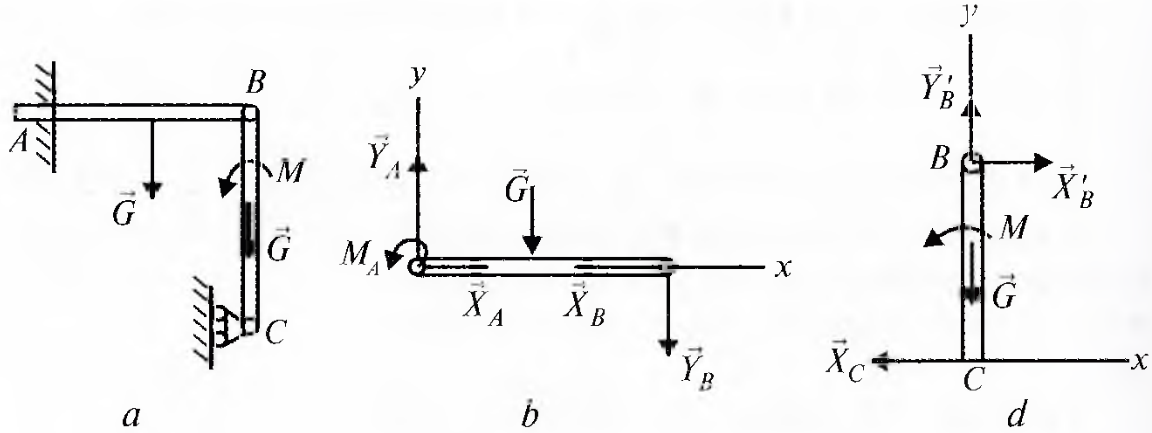
kelib chiqadi.

6-masala. Og'irligi G bo'lgan balkaning A uchi devorga kirgizib mahkamlangan, B uchiga BC balka sharnir yordamida biriktirilgan. BC balkaning C uchi qo'zg'aluvchi tayanchga mahkamlangan. BC balka og'irligi AB balka og'irligi bilan bir xil. A, B, C tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. BC balkaga momenti M bo'lgan juft kuch qo'yilgan. $AB = BC = a$ (52-rasm, *a*).

Yechish. Sanoq sistemasini (52-rasm, *b, d*) dagidek tanlaymiz. AB va BC balkalar muvozanatini alohida-alohida tekshiramiz. Ularga ta'sir etuvchi kuchlar rasmda ko'rsatilgan.

AB balkaning muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi (52-rasm, *b*):

$$\sum F_{vx} = 0;\ X_A - X_B = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0;\ Y_A - G - Y_B = 0, \qquad (22.10)$$
$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0;\ M_A - G \cdot \frac{AB}{2} - Y_B \cdot AB = 0.$$



52-rasm.

BC balkaning muvozanat shartlari quyidagicha yoziladi (52-rasm, *d*):

$$\sum F_{vx} = 0;\ X'_B - X_C = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0;\ Y'_B - G = 0, \qquad (22.11)$$
$$\sum m_B(\vec{F}_v) = 0;\ M - X_C \cdot BC = 0.$$

(22.10), (22.11) tenglamalarni yechsak:

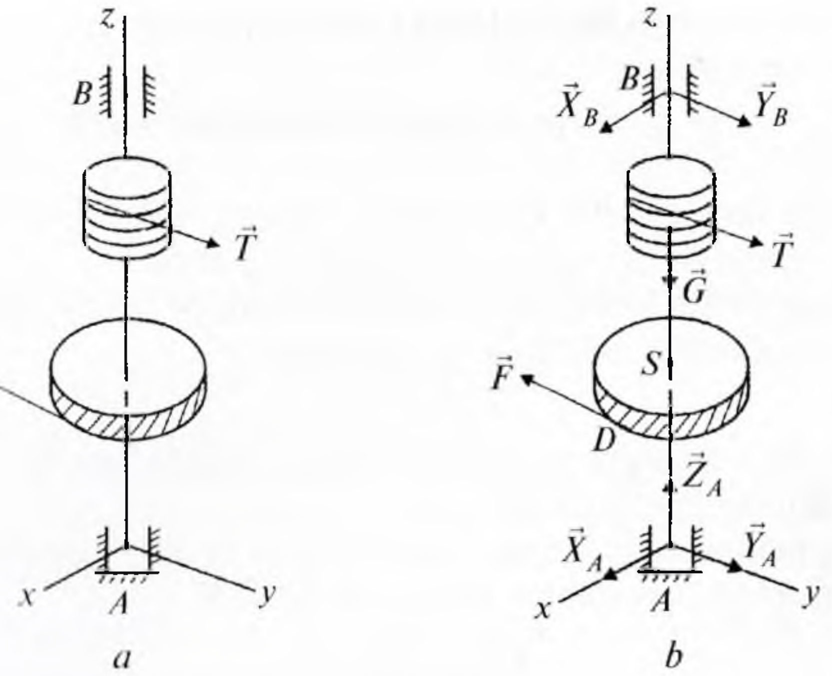
$$X_A = X_B = X_C = \frac{M}{a},\ Y_A = 2 \cdot G,\ Y_B = G,\ M_A = \frac{Ga}{2}.$$

7-masala. Og'rligi G = 1,6 kN bo'lgan baraban o'qiga zanjir o'ralgan bo'lib, uning tarangligi T=20 kN, r_1 = 20 sm (53-rasm, *a*). Baraban *S* shesternyaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch ta'sirida muvozanatda turadi. $\vec{F}$ va $\vec{T}$ *Oy* o'qiga parallel, r_2=40 sm. Shesternya markazi *A* podpyatnikdan *AS*=10 sm uzoqlikda joylashgan. *AB*=120 sm, *SD*=40 sm. *A* podpyatnik, *B* podshipnik reaksiyalari hamda kuch miqdori topilsin.

Yechish. 53-rasm, *a* dagi baraban muvozanatini tekshiramiz. *A* podpyatnik, *B* podshipnik ta'sirini mos ravishda $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. U holda baraban $\vec{T}, \vec{F}, \vec{G}$, $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Bu kuchlar fazodagi ixtiyoriy kuchlar sistemasidan iborat.

Demak, muvozanat tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$\sum F_{vx} = 0;\ X_A + X_B = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0;\ Y_A + Y_B + T - F = 0,$$
$$\sum F_{vz} = 0;\ Z_A - G = 0,$$
$$\sum m_x(\vec{F}_v) = 0;\ 10 \cdot F - 50 \cdot T - 120 \cdot Y_B = 0,$$



53-rasm.

$$\sum m_y(\vec{F}_\nu) = 0;\ 120 \cdot X_B = 0,$$

$$\sum m_z(\vec{F}_\nu) = 0;\ 20 \cdot T - 40 \cdot F = 0. \qquad (22.12)$$

Son qiymatlarni qo'ysak:

$$X_A = 0,\ Y_A = -2{,}5\,\text{kN},\ Z_A = 1{,}6\,\text{kN},$$

$$X_B = 0,\ Y_B = -7{,}5\,\text{kN},\ F = 10\,\text{kN}.$$

Bu yerdagi (−) ishora Y_A, Y_B larning haqiqiy yo'nalishi 53-rasm, *b* dagiga teskari bo'lishini bildiradi.

? *Nazorat savollari*

1. Puanso lemmasi qanday ta'riflanadi?
2. Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga keltirishni tushuntiring.
3. Bosh vektor va bosh moment nima?
4. Qanday holda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi?
5. Qanday holda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bosh momentga keltiriladi?
6. Dinamo nima?
7. Teng ta'sir etuvchining yo'naltiruvchi kosinuslari qanday aniqlanadi?
8. Bosh momentning yo'naltiruvchi kosinuslari qanday topiladi?
9. Bosh moment bilan bosh vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
10. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday ta'riflanadi va yoziladi?
11. Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar muvozanat shartlarini ta'riflang va yozing.

VI BOB. ISHQALANISH KUCHI

23- §. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi

Bir jism ikkinchi bir jism ustida sirpanganida hosil bo'ladigan qarshilik *sirpanishdagi ishqalanish kuchi* deyiladi.

Ishqalanish kuchining jism normal bosimiga to'g'ri proporsional (mutanosib) ekanligi tajribalarda aniqlangan:

$$F^{ish} = fN, \tag{23.1}$$

bu yerda: N — tekshirilayotgan jismning normal bosimi; f — sirpanish ishqalanish koeffitsiyenti.

Agar ishqalanuvchi jismlar tinch turgan bo'lsa, ularning ishqalanish kuchi statik ishqalanish kuchi deb ataladi:

$$F_{max}^{ish} = f_0 \cdot N, \tag{23.2}$$

bu yerda: f_0 — jismning tinch turgan vaqtdagi ishqalanish koeffitsiyenti.

Jism g'adir-budir tayanch tekislik ustida muvozanatda turgan bo'lsa, tayanchning reaksiya kuchi normal reaksiya hamda ishqalanish kuchidan iborat bo'ladi (54-rasm).

Normal reaksiya kuchi bilan maksimal ishqalanish kuchiga to'g'ri keladigan to'la reaksiya kuchi $\vec{R}$ orasidagi burchak φ *ishqalanish burchagi* deyiladi:

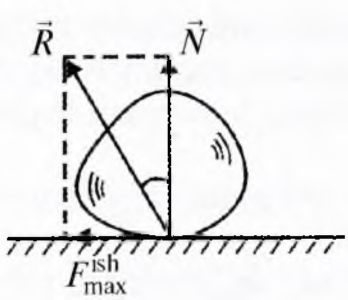
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{F_{max}^{ish}}{N} = \frac{f_0 \cdot N}{N} = f_0 . \tag{23.3}$$

Agarda g'adir-budir sirt ustida turgan jismga normal reaksiya bilan α burchak hosil qiluvchi $\vec{P}$ kuch qo'yilganda jismni harakatga keltiruvchi $P \cdot \sin\alpha$ kuch maksimal ishqalanish kuchidan katta bo'lishi kerak (55-rasm), ya'ni:

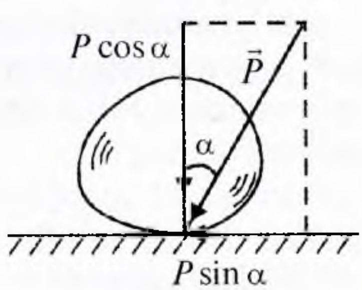
$$P \cdot \sin\alpha > f_0 \cdot P \cdot \cos\alpha ,$$

bundan $\quad \mathrm{tg}\alpha > f_0 = \mathrm{tg}\varphi$ yoki $\alpha > \varphi$

kelib chiqadi.



54-rasm.

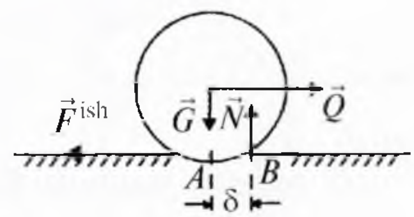


55-rasm.

Ishqalanish kuchi yuzaga keladigan holatlarni tekshirishga oid statika masalalari ishqalanish kuchi hisobga olinmaydigan masalalar singari, ya'ni muvozanat tenglamalarini tuzish yo'li bilan yechiladi. Lekin ishqalanish kuchlari ham jismga ta'sir qiluvchi kuchlar qatoriga kiradi.

24- §. Dumalanishdagi ishqalanish kuchi

Bir jismning ikkinchi jism ustida dumalanishga qarshilik qiluvchi kuch *dumalanishdagi ishqalanish kuchi* deyiladi. Og'irligi G, radiusi R bo'lgan g'ildirakka Q kuch ta'sir qilsin (56-rasm).



56-rasm.

Q kuch ta'sirida g'ildirak bilan sirtning tegib turgan nuqtasida sirpanishdagi ishqalanish kuchi hosil bo'ladi. Modul jihatidan teng bo'lgan $\vec{Q}$ va $\vec{F}^{ish}$ kuchlar yelkasi g'ildirak radiusiga teng bo'lgan juft kuch hosil qiladi va u g'ildirakni dumalatishga harakat qiladi.

G'ildirakning sirtga ko'rsatayotgan bosim kuchi $\vec{G}$ ta'sirida ikki jismning bir-biriga tegib turgan yuzasi deformatsiyalanadi. Natijada normal reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi A nuqtadan o'ng tomonda joylashgan B nuqtaga qo'yilgan bo'ladi. Bosim kuchi $\vec{G}$ va normal reaksiya kuchi $\vec{N}$ yelkasi $AB = \delta$ bo'lgan juft kuchni hosil qilib, u g'ildirak dumalanishiga qarshilik ko'rsatadi. δ – *dumalanishdagi ishqalanish koeffitsiyenti* deyiladi.

Shunday qilib, g'ildirakka momentlari bir-biriga qarama-qarshi yo'nalgan ($\vec{Q}$, $\vec{F}^{ish}$) va ($\vec{G}$, $\vec{N}$) juft kuchlar ta'sir etadi. G'ildirak dumalashi oldida

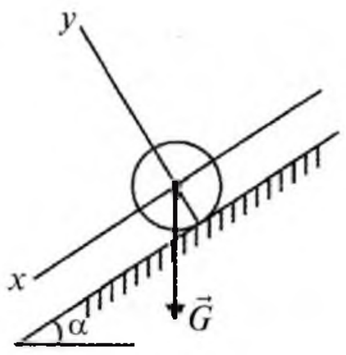
$$m_A(\vec{Q}) = m_A(\vec{N}) \quad \text{yoki} \quad Q \cdot R = N \cdot \delta \qquad (24.1)$$

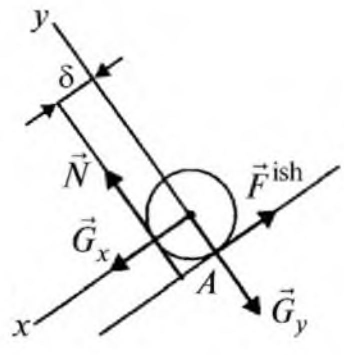
bo'ladi.

(24.1) dan: $Q = \frac{\delta}{R}N$. Agarda $Q > \frac{\delta}{R}N$ bo'lsa, g'ildirak dumalaydi.

8-masala. Og'irligi G, diametri 1 m bo'lgan g'altak g'ildiramasligi uchun og'ma tekislikning gorizontga eng katta og'ish burchagi topilsin. Dumalanish ishqalanish koeffitsiyenti δ=0,0005 m (57-rasm, *a*).

Yechish. G'altak muvozanatini tekshiramiz. Unga aktiv $\vec{G}$ og'irlik kuchi, $\vec{N}$, $\vec{F}^{ish}$ reaksiyalar ta'sir qiladi (57-rasm, *b*).





57-rasm.

$\vec{G}$ og'irlik kuchini $\vec{G}_x, \vec{G}_y$ tuzuvchilarga ajratamiz:

$$G_x = G \cdot \sin\alpha, \; G_y = G \cdot \cos\alpha.$$

G_x g'altakni aylantirishga harakat qilsa, G_y esa unga qarshilik ko'rsatadi. G'altakka ta'sir qiluvchi kuchlarning muvozanati yaqinidagi muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{vy} = 0; -G \cdot \cos\alpha + N = 0; \; \sum F_{vx} = 0; \; G \cdot \sin\alpha + F^{ish} = 0,$$

$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0; \; G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha - N \cdot \delta = 0.$$

Mazkur tenglamalarni yechsak,

$$N = G \cdot \sin\alpha, \; G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha - G \cdot \delta \cdot \cos\alpha = 0$$

kelib chiqadi.

Bundan: $\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2k}{d}; \; \mathrm{tg}\alpha = 0{,}001, \; \alpha = 0{,}057°.$

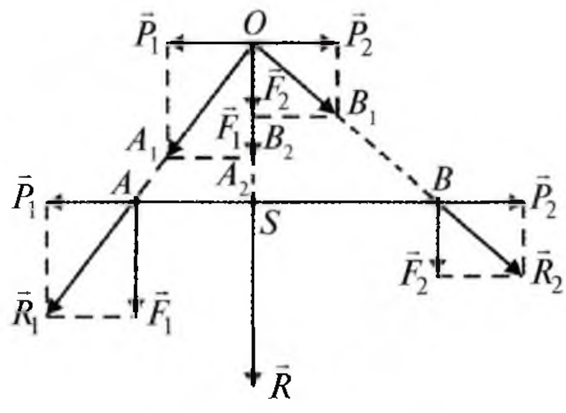
? *Nazorat savollari*

1. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi nima?
2. Dumalashdagi ishqalanish kuchi nima?
3. Ishqalanish burchagi deb nimaga aytiladi?
4. Jism harakatga kelishi uchun ta'sir qilayotgan kuchning normal bilan tashkil qilgan burchagi va ishqalanish burchagi orasidagi munosabat qanday bo'lishi kerak?
5. Jism dumalanishi oldida qanday shart bajarilishi kerak?

VII BOB. PARALLEL KUCHLAR. OG‘IRLIK MARKAZI

25- §. Bir tomonga yo‘nalgan ikki parallel kuchni qo‘shish

Faraz qilaylik, jismning A va B nuqtalariga mos ravishda bir tomonga qarab yo‘nalgan $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlar qo‘yilgan bo‘lsin (58-rasm). A va B nuqtalarga ta’sir chiziqlari AB da joylashgan $(\vec{P_1}, \vec{P_2}) \Leftrightarrow 0$ sistemani qo‘yamiz. Natijada A nuqtada $\vec{F_1}$ va $\vec{P_1}$, B nuqtada esa $\vec{F_2}$ va $\vec{P_2}$ kuchlar hosil bo‘ladi.



58-rasm.

Ularni 4-aksiomaga asosan qo‘shib $\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{P_1}$ hamda $\vec{R_2} = \vec{F_2} + \vec{P_2}$ kuchlarni hosil qilamiz. $\vec{R_1}$ va $\vec{R_2}$ ta’sir chiziqlarining kesishgan nuqtasini O deb belgilab, ularni 3-aksiomadagi teoremaga ko‘ra O nuqtaga ko‘chiramiz. So‘ngra $\vec{R_1}$ ni, $\vec{F_1}, \vec{P_1}$; shuningdek, $\vec{R_2}$ ni $\vec{F_2}, \vec{P_2}$ kuchlarga ajratamiz.

Demak, O nuqtada bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘nalgan $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlar hosil bo‘ladi. Ularni algebraik qo‘shib,teng ta’sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R = F_1 + F_2. \tag{25.1}$$

Endi $\vec{R}$ ni ta’sir chizig‘i bo‘ylab S nuqtaga ko‘chiramiz.

58-rasmdagi ΔOAS va ΔOA_1A_2, ΔOBS va ΔOB_1B_2 o‘xshash bo‘lgani uchun

$$\frac{F_1}{OS} = \frac{P_1}{AS}, \quad \frac{F_2}{OS} = \frac{P_2}{SB} \tag{25.2}$$

bo‘ladi.

(25.2) dan:

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS}. \tag{25.3}$$

(25.3) dan hosilaviy proporsiya tuzsak:

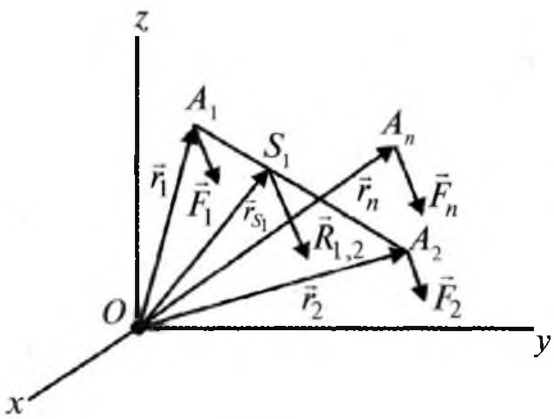
$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{F_1 + F_2}{SB + AS}$$

yoki

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{R}{AB}. \tag{25.4}$$

Demak, bir tomonga qarab yo‘nalgan ikki parallel kuchning teng ta’sir etuvchisi ularning algebraik yig‘indisiga teng bo‘lib, yo‘nalishi mazkur kuchlar yo‘nalishida,ta’sir chizig‘i esa kuchlar qo‘yilgan nuqtalar orasidagi masofani shu kuchlarga teskari proporsional bo‘laklarga bo‘lib o‘tadi.

26- §. Parallel kuchlar markazi



59-rasm.

Fazoda bir tomonga qarab yo‘nalgan parallel $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ kuchlar jismning A_1, A_2, ..., A_n nuqtalariga qo‘yilgan bo‘lsin (59-rasm). Kuchlar qo‘yilgan nuqtalarning *Oxyz* sanoq sistemasiga nisbatan radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ deb belgilaymiz. Yuqoridagi mavzuga asoslanib, avval $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ ni qo‘shamiz:

$$R_{1,2} = F_1 + F_2, \quad F_1 \cdot A_1S_1 = F_2 \cdot S_1A_2.$$

S_1 nuqta radius-vektorini $\vec{r}_{S_1}$ desak: $F_1 \cdot (\vec{r}_{S_1} - \vec{r}_1) = F_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_{S_1})$,

bundan $\vec{r}_{S_1} = \dfrac{F_1 \cdot \vec{r}_1 + F_2 \cdot \vec{r}_2}{F_1 + F_2}$ kelib chiqadi.

25-§ dagidek qo‘shishni davom ettirsak:

$$\vec{r}_S = \frac{F_1 \cdot \vec{r}_1 + F_2 \cdot \vec{r}_2 + ... + F_n \cdot \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n} \quad \text{yoki} \quad \vec{r}_S = \frac{\sum F_\nu \cdot \vec{r}_\nu}{\sum F_\nu} \qquad (26.1)$$

hosil bo‘ladi.

(26.1) formula yordamida aniqlanadigan S nuqta *parallel kuchlar markazi* deyiladi.

27- §. Qattiq jismning og‘irlik markazi

Yer sirtiga yaqin bo‘lgan qattiq jismning har qaysi bo‘lagiga Yer markaziga qarab yo‘nalgan og‘irlik kuchi ta’sir etadi. Tekshirilayotgan jism o‘lchamlari Yer o‘lchamlariga nisbatan juda kichik bo‘lgani uchun ta’sir etuvchi og‘irlik kuchlarini parallel deb qarash mumkin. Demak,parallel kuchlar markazi jismning og‘irlik markazidan iborat bo‘ladi. Shunday qilib, jism og‘irlik markazi (26.1) formuladan aniqlanadi.

Jism bo‘laklariga ta’sir etuvchi og‘irlik kuchlarining teng ta’sir etuvchisini G desak,

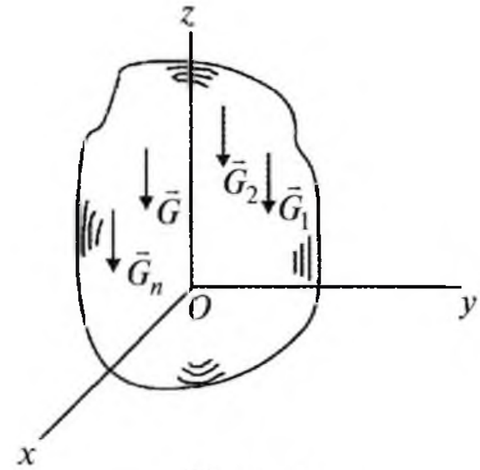
$$G = \sum G_v .$$

Natijada (26.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum G_v \cdot \vec{r}_v}{\sum G_v} \quad \text{yoki}$$

$$x_S = \frac{\sum G_v \cdot x_v}{\sum G_v}, \quad y_S = \frac{\sum G_v \cdot y_v}{\sum G_v},$$

$$z_S = \frac{\sum G_v \cdot z_v}{\sum G_v}. \qquad (27.1)$$



60-rasm.

28- §. Bir jinsli jismlar og‘irlik markazining koordinatalari

Bir jinsli jism biror bo‘lagining og‘irligi uning hajmiga proporsional bo‘lsin. Bu holda:

$$G_v = \gamma \cdot V_v , \qquad (28.1)$$

bu yerda: γ — bir birlik hajm og‘irligi; V_v — jism v bo‘lagining hajmi.

(28.1) ni (27.1) ga qo‘ysak:

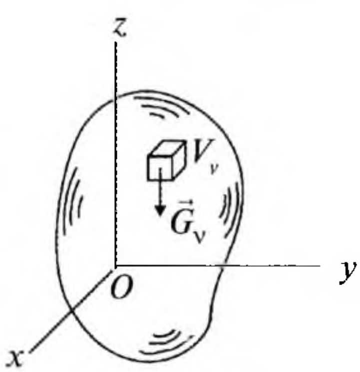
$$x_S = \frac{\sum V_v \cdot x_v}{\sum V_v}, \quad y_S = \frac{\sum V_v \cdot y_v}{\sum V_v}, \quad z_S = \frac{\sum V_v \cdot z_v}{\sum V_v}. \qquad (28.2)$$

Koordinatalari (28.2) formula bilan aniqlanadigan nuqta jism hajmining og‘irlik markazi deyiladi (61-rasm).

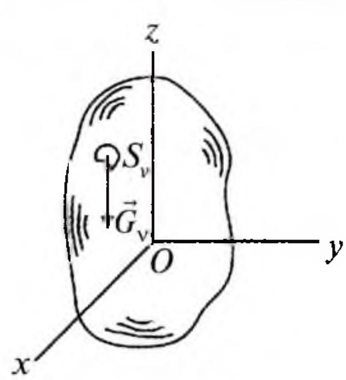
Jism yuzasining og‘irlik markazini aniqlash uchun undan S_v yuzani ajratib olamiz (62-rasm). Bu yuza og‘irligi:

$$G_v = \delta \cdot S_v , \qquad (28.3)$$

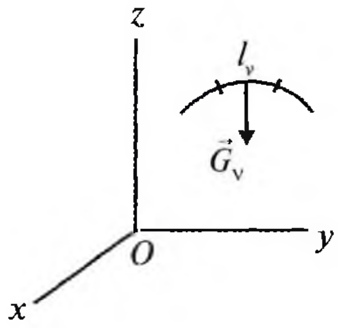
bu yerda: δ — bir birlik yuza og‘irligi; S_v — jism v bo‘lagining yuzi.



61-rasm.



62-rasm.



63-rasm.

(28.3) ni (27.1) ga qo'ysak:

$$x_S = \frac{\sum S_v \cdot x_v}{\sum S_v}, \quad y_S = \frac{\sum S_v \cdot y_v}{\sum S_v}. \qquad (28.4)$$

(28.4) jism yuzasi og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash formulasidir.

Chiziq og'irlik markazining koordinatalarini topish uchun undan l_v yoyni ajratamiz. Bu yoyning og'irligi:

$$G_v = \rho \cdot l_v, \qquad (28.5)$$

bu yerda: ρ — bir birlik yoy og'irligi; l_v — jism v bo'lagining uzunligi (63-rasm).

(28.5) ni (27.1) ga qo'yamiz:

$$x_S = \frac{\sum l_v \cdot x_v}{\sum l_v}, \quad y_S = \frac{\sum l_v \cdot y_v}{\sum l_v}, \quad z_S = \frac{\sum l_v \cdot z_v}{\sum l_v}. \qquad (28.6)$$

(28.6) dan chiziq og'irlik markazining koordinatalari aniqlanadi.

29- §. Jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash usullari

Jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlashning quyidagi usullari bor:

1. Simmetriya usuli. Agar jism simmetriya tekisligi, simmetriya o'qi, simmetriya markaziga ega bo'lsa, uning og'irlik markazi mos ravishda simmetriya tekisligida, o'qida, markazida yotadi.

2. Ajratish usuli. Agar jismning og'irlik markazini ma'lum bo'lgan chekli bo'laklarga ajratish mumkin bo'lsa, (28.2), (28.4), (28.6) formulalardan foydalanib jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash mumkin.

3. To'ldirish usuli. Bu holda jismni og'irlik markazi ma'lum bo'lgan chekli bo'laklar bilan to'ldiriladi, so'ngra (28.2), (28.4), (28.6) formulalar yordamida jism og'irlik markazining koordinatalari topiladi.

4. Integrallash usuli. Agar yuqoridagi usullarni qo'llash mumkin bo'lmasa, jismdan elementar bo'lakcha ajratib olinadi. Bu holda (28.2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x_S = \frac{\sum \Delta V_v \cdot x_v}{\sum \Delta V_v}, \quad y_S = \frac{\sum \Delta V_v \cdot y_v}{\sum \Delta V_v}, \quad z_S = \frac{\sum \Delta V_v \cdot z_v}{\sum \Delta V_v}.$$

Bundan ΔV_v larni nolga intiltirib limitga o'tsak , yuqorida keltirilgan formulaning suratlari jism hajmi bo'yicha tarqalgan integralni, mahraji esa jism hajmini beradi:

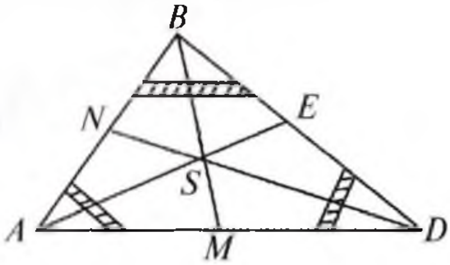
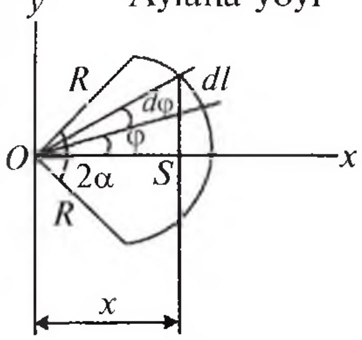
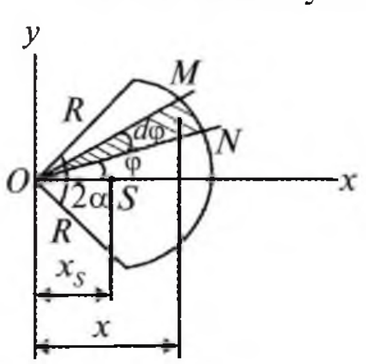
$$x_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV,\ y_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV,\ z_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV. \qquad (29.1)$$

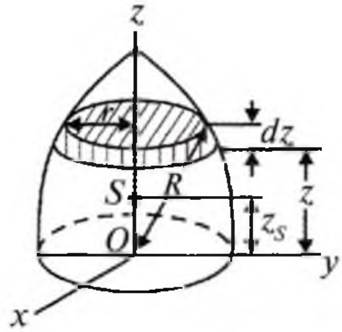
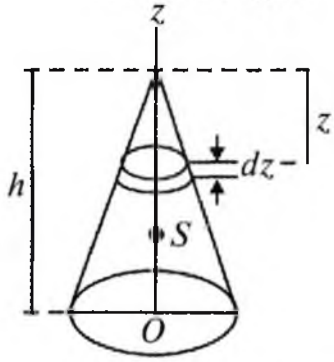
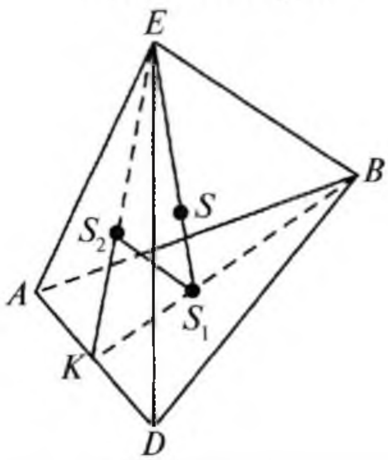
(28.4) va (28.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_S = \frac{1}{S}\int_{(S)} x dS,\ y_S = \frac{1}{S}\int_{(S)} y dS; \qquad (29.2)$$

$$x_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl,\ y_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} y dl,\ z_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} z dl. \qquad (29.3)$$

30- §. Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari

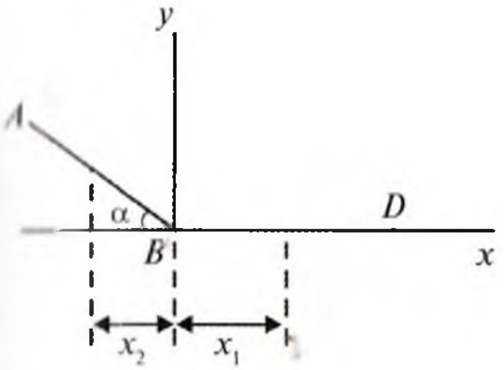
T/r	Jism shakli	Og'irlik markazi
1	2	3
1	Uchburchak yuzi 	$SM = \frac{BM}{3},\ SN = \frac{DN}{3},$ $SE = \frac{AE}{3}$
2	Aylana yoyi 	$dl = Rd\varphi,\ x = R\cos\varphi,$ $x_S = \frac{\int_{(L)} x dl}{L},\ L = \int_{-\alpha}^{\alpha} Rd\varphi,$ $x_S = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ Yarim aylana uchun: $x_S = \frac{2R}{\pi}$
3	Doira sektori yuzi 	$dS_{\Delta OMN} = \frac{1}{2}R^2 d\varphi,$ $x = \frac{2}{3}R\cos\alpha,$ $S = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}R^2 d\varphi,$ $x_S = \frac{\int_{(S)} x dS}{S} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

1	2	3
4	Yarimshar hajmi 	$x_S = 0,\ y_S = 0,\ z_S = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} z\,dV,$ $r = \sqrt{R^2 - z^2},$ $dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz,$ $\int\limits_{-R}^{R} z\pi(R^2 - z^2)dz = \int\limits_{(V)} z\,dV,$ $V = \frac{2}{3}\pi R^3,\ z_S = \frac{3}{8}R$
5	Konus hajmi 	$Vz_S = \int\limits_{(V)} z\,dV,\ V = \frac{1}{3}Sh,$ $dV = \frac{S}{h^2}z^2 dz,$ $\frac{1}{3}Shz_S = \int\limits_0^h \frac{Sz^3}{h^2}dz,\ z_S = \frac{3}{4}h$
6	Piramida hajmi 	$SS_1 = \frac{1}{3}SE = \frac{1}{4}S_1E$

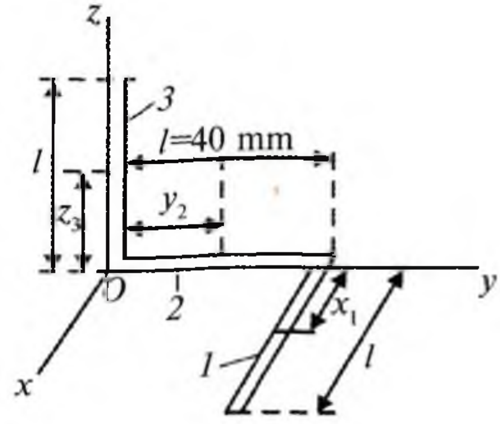
31- §. Masalalar

9-masala. *ABD* kronshteyn *AB* va *BD* sterjenlardan tashkil topgan. Ikkala sterjen og'irligi bir xil BD=20 sm, α=60°. Kronshteyn og'irlik markazining absissasi x_S=0 bo'lishi uchun *AB* uzunligi qanday bo'lishi topilsin (64-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 64-rasmdagidek tanlaymiz. *ABD* kronshteyn og'irlik markazi (28.6) formuladan foydalanib aniqlanadi:



64-rasm.



65-rasm.

$$x_S = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}, \quad y_S = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2}{l_1 + l_2}. \tag{31.1}$$

Masala shartiga ko'ra x_S=0 bo'lishi so'ralgan. Shuning uchun (31.1) formulaning birinchisidan foydalanamiz.

Tekshiralayotgan masalada:

$$x_1 = \frac{BD}{2}, \quad x_2 = -\frac{AB}{2}\cos\alpha, \quad l_1 = BD = 20\,\text{sm}, \quad l_2 = AB.$$

Natijada: $$x_S = \frac{l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{2} \cdot l_2 \cos\alpha}{l_1 + l_2} = 0.$$

Son qiymatlarni formulaga qo'ysak:

$$20 \cdot 10 - \frac{l_2^2}{4} = 0, \quad l_2^2 = 800, \quad l_2 = 20\sqrt{2} = 28{,}2\ \text{sm}$$

kelib chiqadi.

10-masala. Uzunligi 120 mm bo'lgan to'g'ri burchak ostida egilgan (65-rasm) simning og'irlik markazi aniqlansin. O'lchovlar rasmda berilgan.

Yechish. Sanoq sistemasini 65-rasmdagidek tanlaymiz. Simning og'irlik markazi (28.6) ga asosan aniqlanadi:

$$x_S = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \quad y_S = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$

$$z_S = \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3}{l_1 + l_2 + l_3}. \tag{31.2}$$

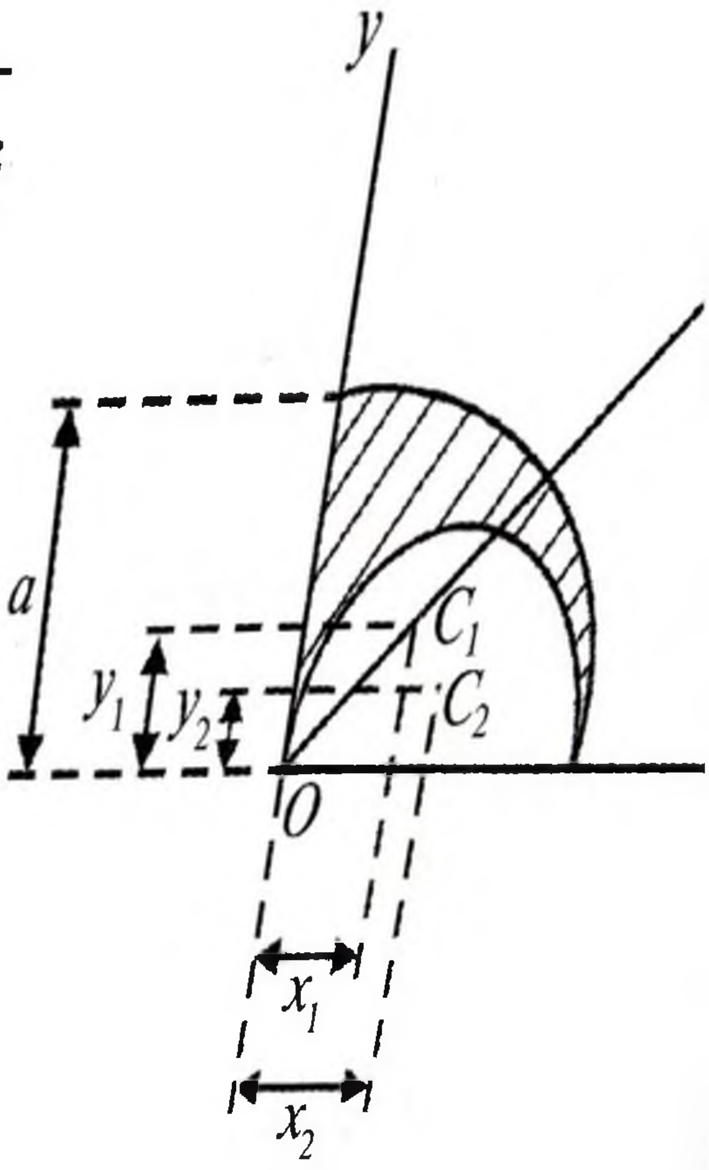
65-rasmdan:

$$x_2 = x_3 = y_1 = y_3 = z_1 = z_2 = 0, \quad x_1 = y_2 = z_3 = 20\ \text{mm}. \tag{31.3}$$

(31.3) ni (31.2) ga qo'ysak: $x_S = 0{,}67\,\text{sm}$, $y_S = 0{,}67\,\text{sm}$, $z_S = 0{,}67\,\text{sm}$.

11-masala. Radiusi $R_1=a$ bo'lgan chorak aylana bilan radiusi $R_2=\frac{a}{2}$ bo'lgan aylana chegaralangan yuzaning og'irlik markazi aniqlansin (66-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 66-rasmdagidek tanlaymiz. Chorak doira yuzining og'irlik markazi C_1 simmetriya o'qi OA da yotadi:



66-rasm.

$$x_1 = y_1 = OC_1 \cdot \cos 45°.$$

30-§ ga asosan:

$$OC_1 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \quad \text{yoki} \quad OC_1 = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}.$$

Natijada $$x_1 = y_1 = \frac{4a}{3\pi}. \qquad (31.4)$$

Yarimdoira og'irlik markazining koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$x_2 = \frac{a}{2},\ y_2 = \frac{2}{3} \cdot R_2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{3\pi}. \qquad (31.5)$$

Endi chorak aylana bilan yarimaylana chegaralangan yuza og'irlik markazini aniqlaymiz. U (28.4) ga asosan:

$$x_S = \frac{S_1x_1 - S_2x_2}{S_1 - S_2},\ y_S = \frac{S_1y_1 - S_2y_2}{S_1 - S_2}, \qquad (31.6)$$

bunda $$S_1 = \frac{\pi R_1^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4},\ S_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}. \qquad (31.7)$$

(31.4), (31.5) va (31.7) ni (31.6) ga qo'ysak, $x_S=0,349a$ (uzun.bir.), $y_S=0,636a$ (uzun.bir.) kelib chiqadi.

? *Nazorat savollari*

1. Ikkita parallel kuch qanday qo'shiladi?
2. Bir qancha parallel kuchlar qanday qo'shiladi?
3. Jismning og'irlik markazi nima?
4. Uchburchak va trapetsiya yuzining og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Aylana yoyi uzunligi og'irlik markazini aniqlash formulasini yozing.
6. Doira bo'lagi og'irlik markazini aniqlash formulasini yozing.
7. Murakkab jismlar og'irlik markazi qanday topiladi?
8. Og'irlik markazini aniqlash usullarini ta'riflang.

IKKINCHI BO‘LIM

KINEMATIKA

Asosiy tushunchalar

Jismning vaqt o‘tishi bilan o‘z holatini jism bilan bog‘langan sanoq sistemasiga nisbatan uzluksiz ravishda o‘zgartirishi *mexanik harakat* deyiladi.

Kinematikada jism harakati faqat geometrik nuqtayi nazardan, ya’ni unga ta’sir etuvchi kuchlar e’tiborga olinmay tekshiriladi. Harakat tushunchasi fazo, vaqt va harakatlanuvchi jism tushunchalariga bog‘liq. Istalgan vaqtda jismning fazodagi holatini aniqlash mumkin bo‘lgandagina uning harakati ma’lum bo‘ladi. Mexanikada fazo uch o‘lchovli deb qaraladi. Vaqt hech qanday sanoq sistemasiga bog‘lanmasdan, har qanday sistema uchun bir xil va harakatning nisbiyligidan qat’i nazar deb hisoblanadi. Uni uzluksiz o‘zgaruvchi deb, t bilan belgilanadi. Xalqaro (SI) sistemasida vaqtning o‘lchov birligi sekund, masofaning o‘lchov birligi esa metr deb qabul qilingan.

VIII BOB. MODDIY NUQTA KINEMATIKASI

32- §. Moddiy nuqta harakatining berilish usullari

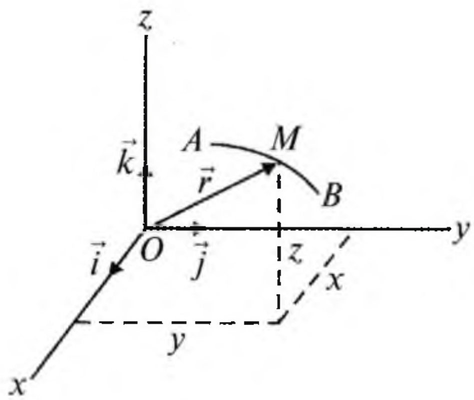
Moddiy nuqtaning harakati davomida fazoda qoldirgan izi *trayektoriya* deb ataladi. Trayektoriya to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, *to‘g‘ri chiziqli harakat*; egri chiziqdan iborat bo‘lsa, *egri chiziqli harakat* deyiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning holatini aniqlash ko‘rsatilgan bo‘lsa, nuqta harakati berilgan deb hisoblanadi.

Moddiy nuqta harakati 4 ta usulda beriladi:

1) vektor; 2) koordinata; 3) tabiiy; 4) qutb.

Biz, asosan, uchta usul bilan tanishib chiqamiz.

1. Vektor usuli. Faraz qilaylik, M nuqta $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan AB trayektoriya bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. O va M nuqtalarni tutashtiruvchi vektor $\overline{OM} = \vec{r}$ nuqtaning *radius-vektori* deyiladi (67-rasm).



67-rasm.

Vaqt o‘tishi bilan M nuqta holati o‘zgara boradi, natijada uning radius-vektori ham miqdor va yo‘nalishi jihatidan o‘zgaradi. Agar M nuqtaning radius-vektori vaqt funksiyasi sifatida berilgan bo‘lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan vaqt uchun aniqlangan bo‘ladi, ya’ni:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (32.1)$$

(32.1) tenglama moddiy nuqta harakatining vektor usulida berilishidir.

2. Koordinata usuli. Chizma geometriyadan, matematikadan ma’lumki, M nuqta holatini x, y, z Dekart koordinatalar orqali aniqlash mumkin. Nuqta harakatlanganda koordinatalar vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi, ya’ni ular vaqtning bir qiymatli fuksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t). \qquad (32.2)$$

(32.2) ma’lum bo‘lsa, nuqtaning fazodagi holatini istalgan paytda aniqlash mumkin.

(32.2) tenglama moddiy nuqta harakatining koordinata usuldagi berilishidan iborat.

(32.2) dan vaqtni yo‘qotsak, nuqtaning trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi. M nuqta harakati Oxy tekisligida sodir bo‘lsa, (32.2) quyidagicha bo‘ladi:

$$x = x(t), \; y = y(t). \qquad (32.3)$$

Nuqta harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘lsa,·harakat yo‘nalishini Ox o‘qi deb qarasak, (32.2) ni

$$x = x(t) \qquad (32.4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

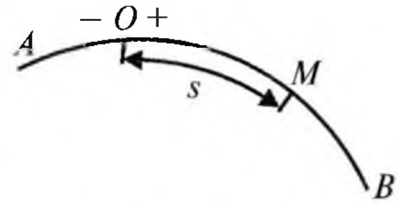
Agar $Oxyz$ koordinata sistemasi o‘qlarining birlik yo‘naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ desak, M nuqta radius-vektorini quyidagicha yozish mumkin (67-rasm):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (32.5)$$

(32.5) tenglama nuqta harakatining vektor usulda berilishi bilan nuqta koordinatalari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

3. Tabiiy usul. Faraz qilaylik, M nuqta ma’lum AB trayektoriya bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsin (68-rasm). Trayektoriyadagi biror O nuqtani sanoq markazi deb, musbat va manfiy yo‘nalishlarni belbilab olamiz. U holda nuqtaning trayektoriyadagi holati s egri chiziqli koordinata bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$s = s(t). \qquad (32.6)$$



68-rasm.

(32.6) tenglama M nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonuni yoki harakatni tabiiy usulda berilishidan iborat.

Demak, M nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun: 1) trayektoriya; 2) trayektoriyadagi sanoq markazi; 3) harakat yo'nalishi; 4) trayektoriya bo'ylab harakat qonuni berilishi kerak. Ko'rinib turibdiki, trayektoriya ma'lum bo'lsa, qo'yilgan masalani hal etishda bu usuldan foydalanish qulay.

33- §. Moddiy nuqta harakatini koordinata usulida berilishidan tabiiy usuldagi berilishiga o'tish

Faraz qilaylik, moddiy nuqta harakati (32.2) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin, ya'ni:

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t). \qquad (*)$$

Matematikadan ma'lumki:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,. \qquad (33.1)$$

(*) ni vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$dx = \dot{x}\,dt, \; dy = \dot{y}\,dt, \; dz = \dot{z}\,dt. \qquad (33.2)$$

(33.2) ni (33.1)ga qo'ysak:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,. \qquad (33.3)$$

$t=0$ va $t=t$ oraliqda (33.3) ni integrallasak:

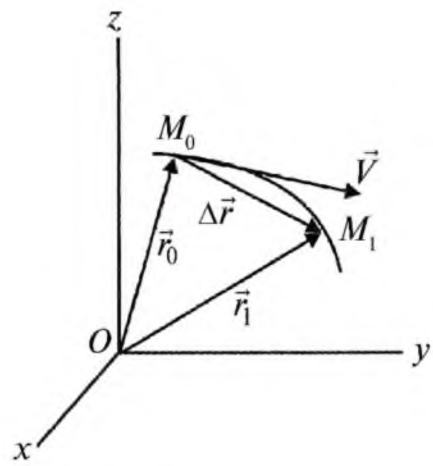
$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = s(t) \qquad (33.4)$$

kelib chiqadi.

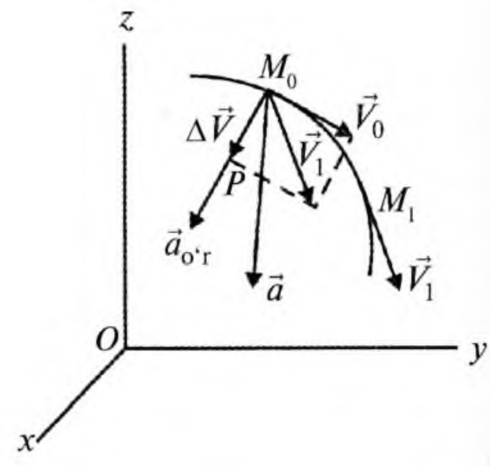
Demak, (*) dan foydalanib, nuqtaning trayektoriya bo'yicha tenglamasini aniqladik. Boshqacha aytganda nuqta harakati koordinata usulida berilganda uning tabiiy usuldagi berilishini keltirib chiqardik.

34- §. Moddiy nuqtaning tezlik va tezlanish vektori

Moddiy nuqtaning holati va harakat yo'nalishining o'zgarishini uning tezligi belgilab beradi.



69-rasm.



70-rasm.

Moddiy nuqta harakati vektor usulda berilganda tezlik qanday aniqlanishini ko‘rib chiqaylik. Aytaylik, $t=t_0$ da tekshirilayotgan nuqta M_0 da bo‘lib, radius-vektori $\vec{r}_0$; $t=t_1$ da nuqta M_1 da, radius-vektori $\vec{r}_1$ bo‘lsin. Bu holda $t_1-t_0=\Delta t$ vaqt o‘zgarishi, $\vec{r}-\vec{r}_0=\Delta\vec{r}$ esa radius-vektor o‘zgarishi bo‘ladi.

Radius-vektor o‘zgarishini vaqt o‘zgarishiga nisbati nuqtaning o‘rtacha tezlik vektorini beradi (69-rasm):

$$\vec{V}_{o'r}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{34.1}$$

(34.1) dan $\Delta t\to 0$ da limitga o‘tsak, nuqtaning haqiqiy tezlik vektori kelib chiqadi:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V} \quad \text{yoki} \quad \vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{34.2}$$

(34.2) dan ko‘ramizki, moddiy nuqtaning tezlik vektori uning radius-vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Δt nolga intilganda $\vec{V}_{o'r}$ M_0 nuqta atrofida aylanib urinmaga yaqinlashadi. Natijada tezlik vektori trayektoriyaga urinma bo‘lib, harakat yo‘nalishi tomon yo‘naladi. Tezlik xalqaro SI sistemada m/s da o‘lchanadi.

Moddiy nuqta tezligi yo‘nalishi va miqdori qanchalik tez o‘zgarishini aniqlaydigan kattalik uning tezlanishidir.

Faraz qilaylik, tekshirilayotgan nuqta $t=t_0$ da M_0-da bo‘lib, uning tezligi $\vec{V}_0$; $t=t_1$ da M_1 da bo‘lib, tezligi $\vec{V}_1$ bo‘lsin. Tezlik o‘zgarishi $\Delta\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_0$ ni aniqlash uchun M_1 nuqta tezligi $\vec{V}_1$ ni M_0 nuqtaga, mazkur tezlikka parallel qilib ko‘chiramiz, so‘ngra parallelogramm qursak, shu parallelogrammning bir tomoni $\Delta\vec{V}$ dan iborat bo‘ladi (70-rasm).

Nuqtaning o'rtacha tezlanish vektori quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{a}_{o'r} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \tag{34.3}$$

(34.3) ning $\Delta t \to 0$ dagi limiti haqiqiy tezlanish vektorini beradi:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{34.4}$$

Demak, moddiy nuqtaning tezlanish vektori tezlik vektoridan vaqt bo'yicha birinchi, radius-vektoridan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Agar nuqta bir tekislikda yotuvchi chiziq bo'ylab harakatlansa, $\vec{a}$ trayektoriya tekisligida yotib, trayektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi.

Agar nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqdan iborat bo'lsa, $\vec{a}_{o'r}$ parallelogramm tekisligi P da yotadi. $\Delta t \to 0$ bo'lganda, ya'ni M_1 nuqta M_0 ga yaqinlashganda, P tekislikning egallagan holati yopishma tekislik deyiladi. Demak, M nuqtaning tezlanish vektori yopishma tekislikda yotadi va trayektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi (70-rasm). SI sistemada tezlanish m/s^2 da o'lchanadi.

35- §. Moddiy nuqtaning tezlik va tezlanishini koordinata usulida aniqlash

Moddiy nuqta harakati Dekart koordinatalarida (32.2) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Tezlik vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda V_x, V_y, V_z desak:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \tag{35.1}$$

(34.2) ga ko'ra (32.5) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

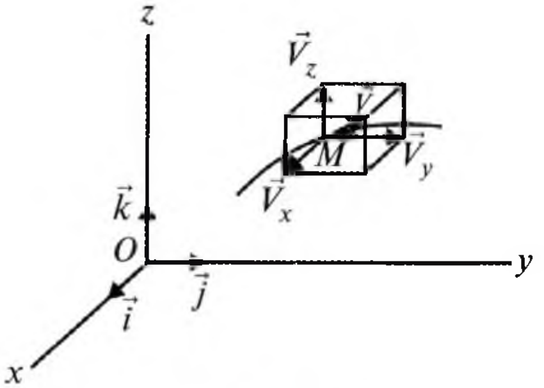
$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{35.2}$$

(35.2) bilan (35.1) ni solishtirsak,

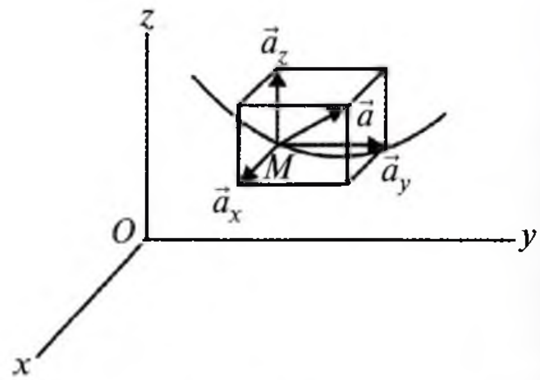
$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{35.3}$$

kelib chiqadi.

Demak, tezlik vektorini koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi nuqtaning mazkur o'qdagi mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng. Tezlik vektori proyeksiyalari mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlariga parallel (71-rasm). $\vec{V_x}$, $\vec{V_y}$, $\vec{V_z}$ larni



71-rasm.



72-rasm.

parallelogramm usulini qo'llab qo'shsak, $\vec{V}$ tezlik $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ larga qurilgan parallelepiped diagonali bo'ylab yo'naladi.

Matematikadan ma'lumki:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,. \tag{35.4}$$

Tezlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos(\vec{V}^\wedge,\vec{i}) = \frac{V_x}{V},\ \cos(\vec{V}^\wedge,\vec{j}) = \frac{V_y}{V},\ \cos(\vec{V}^\wedge,\vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \tag{35.5}$$

Tekshirilayotgan nuqta tezlanish vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini a_x, a_y, a_z desak:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \tag{35.6}$$

(34.4) ga ko'ra (35.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}\,. \tag{35.7}$$

(35.6) bilan (35.7) ni taqqoslasak:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

yoki
$$a_x = \ddot{x},\ a_y = \ddot{y},\ a_z = \ddot{z} \tag{35.8}$$

kelib chiqadi.

Nuqta tezlanishining proyeksiyalari (35.8) ma'lum bo'lsa, tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{35.9}$$

formuladan, yo'naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{i}) = \frac{a_x}{a},\ \cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{j}) = \frac{a_y}{a},\ \cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{k}) = \frac{a_z}{a} \qquad (35.10)$$

formulalardan aniqlanadi (72-rasm).

36- §. Tabiiy usulda berilgan nuqta harakatining tezligini aniqlash

Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda (32.6) tenglama bilan berilgan. Nuqtaning radius-vektori $\vec{r}$ ni egri chiziqli koordinata s ning funksiyasi deb qarash mumkin. Bu holda $\vec{r}$ vaqtning murakkab funksiyasi bo'ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

bu yerda

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

trayektoriyaga o'tkazilgan urinmaning birlik vektorini beradi. Bu vektorni $\vec{\tau}$ deb belgilaymiz.

Natijada

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \qquad (36.1)$$

hosil bo'ladi. Haqiqatan ham, biz bilamizki,

$$\vec{V} = V\vec{\tau}\,. \qquad (36.2)$$

Birlik vektori $\vec{\tau}$ doimo sanoq boshidan nuqtagacha bo'lgan masofaning o'sishi tomon yo'naladi.

(36.1) bilan (36.2) ni solishtirsak:

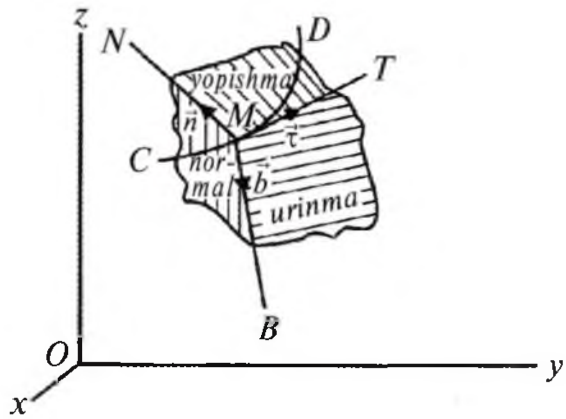
$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \qquad (36.3)$$

kelib chiqadi.

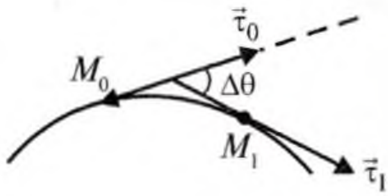
Demak, nuqta tezligining algebraik qiymati egri chiziqli koordinatasidan vaqt bo'yicha birinchi hosilaga teng.

37- §. Tabiiy koordinatalar sistemasi. Chiziqning egriligi. Egrilik radiusi

Qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan M nuqta bir tekislikda yotmaydigan CD egri chiziq bo'ylab harakat qilsin (73-rasm). M nuqtadan egri chiziqli koordinataning o'sishi tomon yo'nalgan MT urinmani o'tkazamiz. MT ga perpendikular qilib o'tkazilgan tekislik normal tekislik deb atalib, unda bir qancha normallar yota-



73-rasm.



74-rasm.

di. Ulardan ikkitasi ahamiyatga ega. Biri *MT* ga perpendikular bo‘lib, chiziqning botiq tomoniga qarab yo‘nalgan bosh normal *MN*, ikkinchisi esa *MT* va *MN* ga perpendikular bo‘lgan binormal *MB* dan iborat.

MT, MN, MB yo‘nalishlardagi o‘qlar tabiiy koordinata o‘qlari deyiladi. Ularning musbat yo‘nalishi o‘ng sistemani tashkil etadigan qilib tanlanadi. Mazkur o‘qlarning birlik vektorlarini mos ravishda $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ deb belgilaymiz. $\vec{\tau}$ va $\vec{b}$ yotgan tekislik urinma, $\vec{\tau}$ va $\vec{n}$ yotgan tekislik yopishma, $\vec{n}$ va $\vec{b}$ yotgan tekislik normal tekislik deb ataladi. Bu tekisliklardan tashkil topgan uchyoqlik tabiiy uchyoqlik deyiladi. *M* nuqtaning trayektoriyasida bir-biriga juda yaqin bo‘lgan M_0 va M_1 nuqtalardan $M_0\tau_0$ va $M_1\tau_1$ urinmalarni o‘tkazamiz (74-rasm). Ular orasidagi burchakni $\Delta\theta$, M_0M_1 yoyni Δs desak,

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k$$

chiziqning egriligini beradi.

Egrilikning teskari qiymati egrilik radiusi deb ataladi va u quyidagicha ifodalanadi:

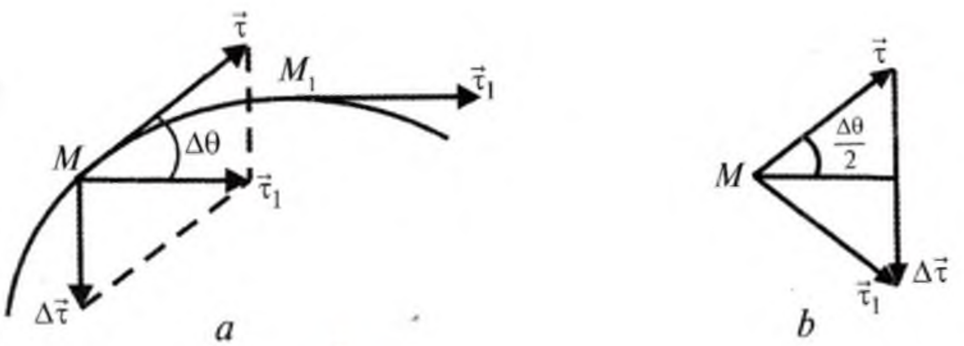
$$\rho = 1/k .$$

38- §. Moddiy nuqta tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Tezlanishni tabiiy usulda aniqlash uchun (36.2) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} . \qquad (38.1)$$

(38.1) dagi $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ning miqdori va yo‘nalishini aniqlash uchun uni quyidagicha yozamiz:



75-rasm.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s},$$

bu yerda $\Delta\vec{\tau}$ trayektoriyadagi bir-biriga yaqin bo'lgan M_0 va M_1 nuqtalardan o'tkazilgan urinmalar birlik vektorlarining ayirmasi (75-rasm, *a*).

$|\vec{\tau}_0| = |\vec{\tau}_1| = 1$ bo'lgani uchun $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1$ va $\Delta\vec{\tau}$ lardan tashkil topgan uchburchak tengyonli bo'ladi (75-rasm, *b*); bu uchburchakdan:

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2}.$$

M_1 ni M_0 ga juda yaqin deb qarasak, $\Delta\theta$ juda kichik bo'ladi. Bu holda $\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ ni $\frac{\Delta\theta}{2}$ bilan almashtirish mumkin, ya'ni:

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2} \quad \text{yoki} \quad \Delta\theta = |\Delta\vec{\tau}|.$$

Natijada:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \qquad (38.2)$$

kelib chiqadi. ρ – egrilik radiusi, k – chiziqning egriligi. $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ vektor $\vec{\tau}$ ga perpendikular, haqiqatan ham $\vec{\tau}$ ning kvadrati birga teng:

$$(\vec{\tau})^2 = 1.$$

Bu tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0. \qquad (38.3)$$

Matematikadan ma'lumki, $\vec{\tau}$ bilan $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ perpendikular bo'lgan holda (38.3) to'g'ri bo'ladi. Demak,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n} \quad \text{yoki} \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{\rho}\vec{n}. \tag{38.4}$$

(38.4) ni (38.1)ga qo'ysak:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}. \tag{38.5}$$

Moddiy nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda a_τ, a_n, a_b desak,

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} + a_b\vec{b} \tag{38.6}$$

bo'ladi. (38.5) bilan (38.6) ni solishtirsak:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \; a_n = \frac{V^2}{\rho}, \; a_b = 0 \tag{38.7}$$

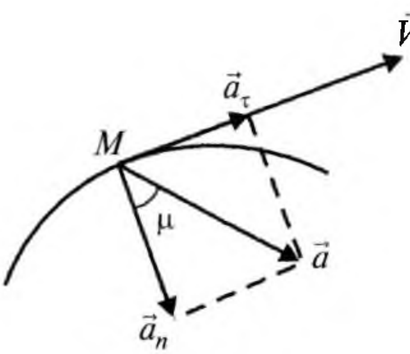
kelib chiqadi.

(38.7)dan foydalanib, to'la tezlanishni aniqlash mumkin:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \tag{38.8}$$

yoki

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{38.9}$$



76-rasm.

Urinma tezlanish $\vec{a}_\tau$ bilan normal tezlanish $\vec{a}_n$ orasidagi burchak $\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}$ bilan aniqlanadi (76-rasm).

Agar moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilib egrilik radiusini aniqlash talab etiladigan bo'lsa, tezlik ifodasini Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozamiz:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2. \tag{38.10}$$

(38.10) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\frac{dV_y}{dt} + 2V_z\frac{dV_z}{dt},$$

bu yerdan $$Va_\tau = V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z$$

yoki $$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V} \tag{38.11}$$

kelib chiqadi.

(38.8) ga asosan:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\,, \qquad (38.12)$$

bundan
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

(38.12) ni (38.7) ning ikkinchisiga qo'ysak, chiziqning egrilik radiusi

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} \qquad (38.13)$$

kelib chiqadi.

39- §. Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari

Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari (38.5) formuladan foydalanib aniqlanadi.

1. Agar nuqta harakati davomida $\vec{a} = 0$, ya'ni $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo'lsa, $\frac{dV}{dt} = 0$, $\frac{V^2}{\rho} = 0$ bo'ladi. Bundan V=const, $\rho=\infty$ kelib chiqadi. Bu holda nuqta harakati to'g'ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo'ladi.

2. Agar $\vec{a}_\tau \neq 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo'lsa, nuqta tezligining yo'nalishi o'zgarmas bo'lib, moduli $V = \left|\frac{ds}{dt}\right|$ bo'ladi; $\rho=\infty$. Bu holda nuqta harakati to'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakatdan iborat.

3. Agar $\vec{a}_\tau = 0$ bo'lib, $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$ bo'lsa, V=const bo'ladi. Natijada moddiy nuqta egri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

Nuqtaning boshlang'ich vaqtdagi tezligi V_0, egri chiziqli koordinatasi $s = s_0$ bo'lsin.

Bularni nazarda tutib, (38.7) ning birinchisini integrallasak:

$$s = s_0 + V_0 t \qquad (39.1)$$

kelib chiqadi.

(39.1) tenglama moddiy nuqtaning egri chiziqli tekis harakati tenglamasi deb ataladi.

4. Agar $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$ bo'lsa, nuqta harakati egri chiziqli o'zgaruvchan harakatdan iborat bo'ladi. a_τ=0 bo'lgan hol tekis o'zgaruvchan harakat deyiladi. Boshlang'ich paytda $s = s_0$, $V = V_0$ deb, (38.7) ning birinchisini integrallaymiz:

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau\,, \; V = a_\tau t + V_0\,. \qquad (39.2)$$

(39.2) ni yana integrallasak:

$$s = \pm a_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0 . \tag{39.3}$$

Moddiy nuqta harakati tekis tezlanuvchan bo‘lsa, (39.3) dan a_τ oldidagi musbat ishora; sekinlanuvchi bo‘lsa, minus ishora olib masala hal etiladi.

40- §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda uning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo‘yicha tenglamasi, tezlik va tezlanishini aniqlash

Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda talab etiladigan kinematik elementlar quyidagi tartibda aniqlanadi:

1. Moddiy nuqtaning trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (32.2) dan vaqt chiqarib tashlanadi.
2. Trayektoriya bo‘yicha tenglamasini aniqlash uchun (32.2) dan vaqt bo‘yicha hosila olinib, (33.4) ga qo‘yiladi.
3. (35.3), (35.4) va (35.5) dan foydalanib tezlik aniqlanadi.
4. (35.8), (35.9) va (35.10) ga asoslanib tezlanish topiladi.
5. Tezlik va tezlanish yo‘nalishlari trayektoriyada ko‘rsatiladi.

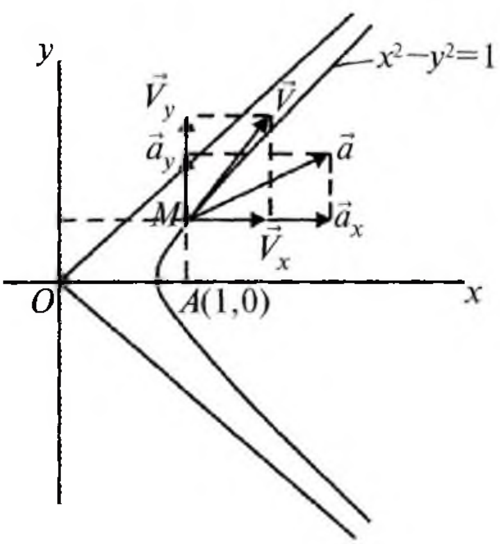
12-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

$$y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \tag{40.1}$$

tenglamalar bilan berilgan (x, y — metr, t — sekund hisobida).

Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, shuningdek t=1 sekunddagi nuqta tezligi hamda tezlanishi topilsin, yo‘nalishlari trayektoriyada ko‘rsatilsin.



77-rasm.

Yechish. Trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (40.1) ni kvadratga ko‘tarib ayiramiz:

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{40.2}$$

(40.2) formula x=1, y=0 nuqtadan boshlanadigan giperbola o‘ng tarmog‘ining yuqori qismidan iborat (77-rasm).

t = 1 sekundda: x = 1,54 m, y= 1,18 m.

Nuqta tezligini aniqlash uchun (40.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \ , \ \dot{y} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) .$$

t=1 sekundda $\dot{x} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}(2,7183 - 1,3679) = 1,18$ m/s,

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = 1,54 \text{ m/s},$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \ ; \ V = \sqrt{1,3924 + 2,3716} = 1,94 \text{ m/s},$$

$$\cos(\vec{V}\,\hat{}\,,\vec{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{1,18}{1,94} = 0,61, \ \cos(\vec{V}\,\hat{}\,,\vec{j}) = 0,7938;$$

$$(\vec{V}\,\hat{}\,,\vec{i}) = 52°25'; \quad (\vec{V}\,\hat{}\,,\vec{j}) = 37°27'$$

Tezlanish quyidagicha bo'ladi:

$$a_x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \ a_y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) .$$

t = 1 sekundda: a_x = 1,54; a_y= 1,18; a = 1,94 m/s^2.

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{i}) = 0,7938, \ \cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{j}) = 0,61; \ (\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{i}) = 37°27'; \ (\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{j}) = 52°25'.$$

Tezlik va tezlanishlar yo'nalishlari 77-rasmda ko'rsatilganidek bo'ladi.

13-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x = e^t \cos t, \ y = e^t \sin t, \ z = e^t \qquad (40.3)$$

tenglamalar bilan berilgan. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo'ylab harakat qonuni aniqlansin (x, y, z — metr, t — sekund hisobida).

Yechish. (40.3) dan vaqtni yo'qotish uchun $z=e^t$ ni (40.3) ning birinchi ikkitasiga qo'yamiz:

$$x = z\cos t, \quad y = z\sin t.$$

Bu tenglikning ikkala tomonlarini kvadratga ko'tarib qo'shamiz:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0. \qquad (40.4)$$

(40.4) tenglamadan ko'ramizki, trayektoriya ikkinchi tartibli doiraviy konusdan iborat ekan.

Nuqtaning trayektoriya bo'yicha tenglamasini aniqlash uchun (40.3) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t,$$
$$\dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t,$$
$$\dot{z} = e^t,$$

bundan:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3e^{2t}. \qquad (40.5)$$

(40.5) ni (33.4) ga qo‘ysak,

$$s = \int_0^t e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} e^t \qquad (40.6)$$

kelib chiqadi.

(40.6) nuqtaning trayektoriya bo‘ylab harakat qonunini ifodalaydi.

41-§. Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda berilganda tezlik va tezlanishni topish

Tabiiy usulda tezlik va tezlanish quyidagi tartibda aniqlanadi:

1. Tezlik miqdori (36.3) formula yordamida topiladi.
2. (38.7) va (38.9) formulalar yordamida tezlanish aniqlanadi.
3. Tezlik va tezlanish yo‘nalishi rasmda ko‘rsatiladi.

14-masala. Moddiy nuqta radiusi R=2 m bo‘lgan aylana bo‘ylab

$$s = 6 + 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

qonunga muvofiq harakatlanadi (s — metr, t — sekund hisobida).

Nuqtaning t = 1 sekunddagi tezligi va tezlanishi topilsin.

Yechish. (36.3) formulaga ko‘ra:

$$V = 4t + t^2.$$

t = 1 sekundda V = 5 m/s.

(38.7) ga ko‘ra: $a_\tau = 4 + 2t, \quad a_n = \dfrac{V^2}{R}.$

t = 1 sekundda

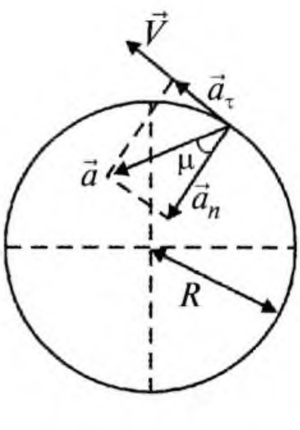
$$a_\tau = 6 \text{ m/s}^2, \; a_n = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ m/s}^2,$$

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}; \; \mathrm{tg}\mu = 0,48; \; \mu = 25°38'.$$

(38.9) dan foydalansak:

$$a = \sqrt{6^2 + 12,5^2} = 13,87 \text{ m/s}^2$$

kelib chiqadi (78-rasm).



78-rasm.

15-masala. Moddiy nuqta radiusi R bo'lgan aylana bo'ylab

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}kt^2 \tag{41.1}$$

qonunga ko'ra harakatlanadi (s, R — metr, t — sekund hisobida).

Nuqta tezlanishi, shuningdek, tezlanish qanday vaqtda k ga teng bo'lishi va bu vaqtda nuqta tezligi qanday bo'lishi aniqlansin.

Yechish. (41.1) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$V = V_0 - kt \text{ (m/s)}.$$

(38.7), (38.9) ga asosan:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = k, \quad a_n = \frac{(V_0 - kt)^2}{R}; \quad a = \sqrt{k^2 - \frac{(V_0 - kt)^4}{R^2}} \quad \text{(m/s}^2\text{)}.$$

Moddiy nuqta tezlanishi k ga teng bo'lishi uchun $a_n = 0$ bo'lishi kerak, ya'ni:

$$V_0 - kt = 0,$$

bundan

$$t = \frac{V_0}{k}; \quad V = 0$$

kelib chiqadi.

42- §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda urinma, normal tezlanish hamda egrilik radiusini aniqlash

Masala yechish tartibi quyidagicha:

1. Nuqta tezligi (35.3), (35.4) formulalar yordamida aniqlanadi.
2. (35.8), (35.9) formulalar yordamida tezlanish topiladi.
3. (38.11) dan foydalanib urinma tezlanishi aniqlanadi.
4. Normal tezlanish (38.12) dan topiladi.
5. Egrilik radiusini aniqlash uchun (38.13) formuladan foydalaniladi.

16-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x = 3t - 0{,}2\sin(9{,}23t),$$

$$y = 0{,}325 - 0{,}2\cos(9{,}23t)$$

tenglamalar bilan berilgan (x, y — metr, t — sekund hisobida).

$t = 0{,}054\pi$ sekund bo'lganda trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin.

Yechish. (35.3) va (35.4) ga asosan:

$$V_x = 3 - 0{,}2 \cdot 9{,}23 \cdot \cos(9{,}23t) = 3 - 1{,}846\cos(9{,}23t),$$

$$V_y = 0{,}2 \cdot 9{,}23 \cdot \sin(9{,}23t) = 1{,}846\sin(9{,}23t).$$

t = 0,54π sekundda

$$V_x = 3 \text{ m/s},\ V_y = 1{,}846 \text{ m/s},\ V = 3{,}52 \text{ m/s}.$$

(35.8), (35.9) formulalarga ko'ra:

$$a_x = 1{,}846 \cdot 9{,}23 \cdot \sin(9{,}23t) = 17\sin(9{,}23t),$$

$$a_y = 1{,}846 \cdot 9{,}23 \cdot \cos(9{,}23t) = 17\cos(9{,}23t).$$

t = 0,054π sekundda

$$a_x = 17 \text{ m/s}^2,\ a_y = 0,\ a = 17 \text{ m/s}^2.$$

(38.11) dan foydalansak:

$$a_\tau = \frac{3 \cdot 17}{5{,}52} = \frac{51}{3{,}52} = 14{,}5 \text{ m/s}^2.$$

Normal tezlanish esa:

$$a_n = \sqrt{289 - 210{,}25} = 8{,}87 \text{ m/s}^2.$$

Egrilik radiusini aniqlashda (38.13) dan foydalansak:

$$\rho = \frac{12{,}39}{8{,}87} = 1{,}39 \text{ m}$$

kelib chiqadi.

17-masala. Moddiy nuqta

$$x = 2t,$$

$$y = 5t^2 - 1 \qquad (42.1)$$

tenglamalarga ko'ra harakat qiladi (x, y – metr, t – sekund hisobida).

Nuqtaning trayektoriya tenglamasi tuzilsin, t=1 sekunddagi tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiusi aniqlansin va ular yo'nalishi trayektoriyada ko'rsatilsin.

Yechish. (42.1) dan vaqt bo'yicha hosila olib, tezlik proyeksiyalari va tezlik modulini topamiz:

$$V_x = 2,\ V_y = 10t. \qquad (42.2)$$

t = 1 sekundda

$$V_x = 2,\ V_y = 10,\ V = \sqrt{4 + 100} = 10{,}2 \text{ m/s}.$$

(42.2) dan hosila olsak:

$$a_x = 0,\ a_y = 10 \text{ m/s}^2,\ a = 10 \text{ m/s}^2.$$

Urinma tezlanishni aniqlaymiz:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},\ a_\tau = \frac{2 \cdot 0 + 10 \cdot 10}{10{,}2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

Normal tezlanish quyidagicha bo'ladi:

$$a_n = \sqrt{100 - 96} = 2 \text{ m/s}^2.$$

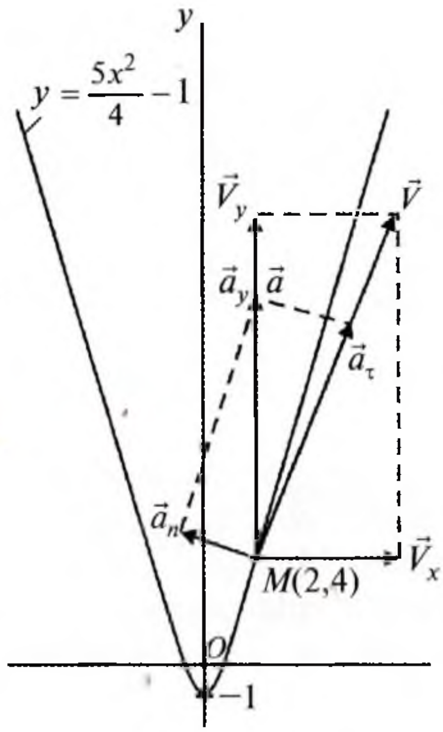
Egrilik radiusi esa:

$$\rho = \frac{(10,2)^2}{4} = 26 \text{ m}.$$

(42.1) dan vaqtni yo'qotish uchun mazkur tenglamaning birinchisidan t ni topib, uni (42.1)ning ikkinchisiga qo'ysak, trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi:

$$y = \frac{5x^2}{4} - 1. \qquad (42.3)$$

(42.3) dan ko'ramizki, nuqta trayektoriyasi paraboladan iborat. $t = 1$ sekunddagi barcha kinematik parametrlar yo'nalishini rasmda ko'rsatamiz (79-rasm). t = 1 s da nuqta koordinatalari x = 2 m, y = 4 m.



79-rasm.

Nazorat savollari

1. Moddiy nuqtaning trayektoriya bo'yicha harakat qonuni yoki tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. Moddiy nuqta harakati qanday usullarda beriladi?
3. Moddiy nuqta harakati grafigi deganda nimani tushunasiz?
4. Nuqtaning berilgan vaqtdagi tezligining yo'nalishi qanday va miqdori nimaga teng?
5. Tekis o'zgaruvchan harakat qonuni va grafigini ta'riflang.
6. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda, trayektoriya qanday aniqlanadi?
7. Harakatdagi nuqtaning tezlik vektori bilan radius-vektori orasida qanday bog'lanish bor?
8. Moddiy nuqta tezlanishi nima? Moddiy nuqta tezlanishi vektori bilan tezlik vektori orasida qanday bog'lanish bor?
9. Moddiy nuqta tezlanishi vektori bilan radius-vektori orasida qanday munosabat bor?
10. Tezlik vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
11. Tezlanish vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
12. Tezlanish yo'nalishi qanday?
13. Tezlik va tezlanish yo'naltiruvchi kosinuslari qanday aniqlanadi?
14. Urinma, normal va to'la tezlanish qanday topiladi?
15. Qanday o'qlar tabiiy koordinata o'qlari deyiladi?
16. Chiziqning egriligi nima? Egrilik radiusiga ta'rif bering.

Jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o‘zgarmasdan qolsa, u absolut qattiq jism deb ataladi. Keyinchalik qattiq jism deganda absolut qattiq jism tushuniladi.

Qattiq jismning sodda harakatlari uning ilgarilama va aylanma harakatlaridir.

43- §. Qattiq jismning ilgarilama harakati

Jism harakati davrida undan olingan ixtiyoriy kesma o‘z-o‘ziga parallel ko‘chsa, bunday harakat ilgarilama harakat deb ataladi (80-rasm). Masalan, velosiped pedalining harakati, to‘g‘ri uchastkada harakat qilayotgan avtomobil bortining harakati ilgarilama harakatdan iborat. Umuman ilgarilama harakatdagi jism nuqtasining trayektoriyasi egri chiziqdan iborat. Jism ilgarilama harakatining xususiyatini quyidagi teorema bilan berish mumkin.

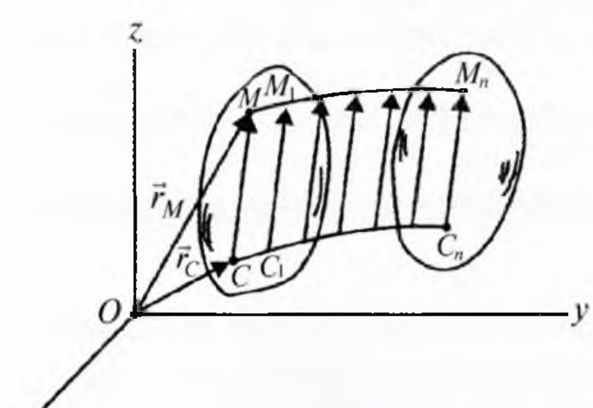
Teorema. *Ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi, har ondagi tezliklari hamda tezlanishlari bir xil bo‘ladi.*

Isbot. Jism $Oxyz$ qo‘zg‘almas Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilama harakatda bo‘lsin. Absolut qattiq jism va ilgarilama harakat ta’rifiga ko‘ra jismning ixtiyoriy C nuqtasidan M nuqtasiga qarab yo‘nalgan vektor $\overline{CM}$ o‘zgarmas hamda $\overline{CM} \,||\, \overline{C_n M_n}$ bo‘ladi.

Natijada C nuqta qanday trayektoriya chizsa, $\overline{CM}$ ustidagi nuqtalar ham shunday trayektoriya chizadi (80-rasm). C va M nuqtalar radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}_C$, $\vec{r}_M$ desak:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \overline{CM}\,. \tag{43.1}$$

M nuqta tezligini topish uchun (43.1) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:



80-rasm.

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\overline{CM}}{dt}\,.$$

$\overline{CM}$ =const bo‘lgani uchun:

$$\frac{d\overline{CM}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} \quad \text{yoki}$$

$$\overline{V_M} = \vec{V}_C\,. \tag{43.2}$$

(43.2) dan vaqt bo‘yicha hosila olsak, tezlanish hosil bo‘ladi:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_C}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C. \tag{43.3}$$

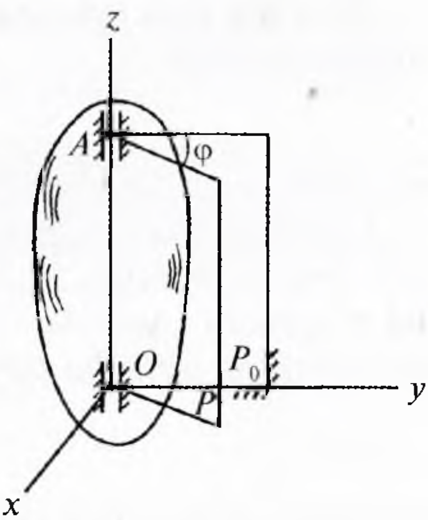
(43.2) formula ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari tezliklari bir xilliligini, (43.3) formula esa tezlanishlari bir xilliligini ko'rsatadi. Shunday qilib, teorema isbotlandi.

Demak, jism ilgarilama harakati uning ixtiyoriy nuqtasi harakati bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$x_M = x_M(t), \ y_M = y_M(t), \ z_M = z_M(t). \tag{43.4}$$

44- §. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati. Aylanma harakat tenglamasi

Jism harakati davrida undagi ikki nuqta qo'zg'almasdan qolsa, bu harakat aylanma harakat deyiladi (81-rasm). Qo'zg'almas O va A nuqtalardan o'tuvchi o'q jismning aylanish o'qi deb ataladi. Jism aylanma harakatini tekshirish uchun qo'zg'almas P_0 va jism bilan birgalikda harakatlanuvchi P tekislikni olamiz. Ular orasidagi burchak $P_0 \hat{} P = \varphi$ bo'lsin. Jism harakatlanganda P_0 va P tekisliklar orasidagi burchak o'zgara boradi. Natijada mazkur burchak vaqtning funksiyasi bo'ladi:



81-rasm.

$$\varphi = \varphi(t). \tag{44.1}$$

(44.1) tenglama jismning burilish yoki aylanish burchagi deyiladi va u radian bilan o'lchanadi.

(44.1) tenglama qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati qonuni yoki aylanma harakati tenglamasi deyiladi.

45- §. Aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi

Faraz qilaylik, $t = t_0$ da jismning burilish burchagi φ_0, $t = t_1$ da esa φ_1 bo'lsin. Bu holda vaqt o'zgarishi $\Delta t = t_1 - t_0$, burilish burchagining o'zgarishi $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ bo'ladi.

Burilish burchagi o'zgarishining vaqt o'zgarishiga nisbati jismning o'rtacha burchak tezligi deyiladi va $\omega_{o'r}$ bilan belgilanadi:

$$\omega_{o'r} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{45.1}$$

Jismning burilgan momentdagi burchak tezligini topish uchun (45.1) formuladan Δt nolga intilganda limit olamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{yoki} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (45.2)$$

Demak, jismning burchak tezligi uning burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng. Uning o'lchov birligi rad/s yoki 1/s dir. Jismning burchak tezligi burilish burchagining qanchalik tez o'zgarishini va bu o'zgarish yo'nalishini aniqlaydi. Shuning uchun burchak tezligi vektor sifatida ifodalanadi. Mazkur vektorni jism aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yamiz va yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan turib qaralganda jism doimo soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylansin (82-rasm).

Oz o'qni jism aylanish o'qida olsak, burchak tezligining vektori bunday yoziladi:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}, \qquad (45.3)$$

bu yerda: $\vec{k}$ — *Oz* o'qining birlik vektori.

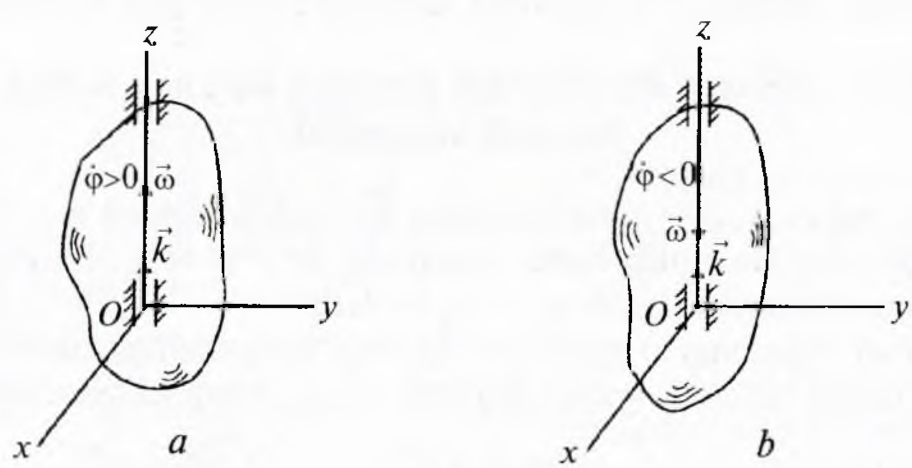
Umumiy holda jismning burchak tezligi vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. $t=t_0$ da burchak tezlik ω_0, $t=t_1$ da esa ω_1 bo'lsin. Burchak tezligi o'zgarishi ($\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$) ni vaqt o'zgarishi ($\Delta t = t_1 - t_0$) ga nisbati jismning *o'rtacha burchak tezlanishi* deb ataladi:

$$\varepsilon_{o'r} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (45.4)$$

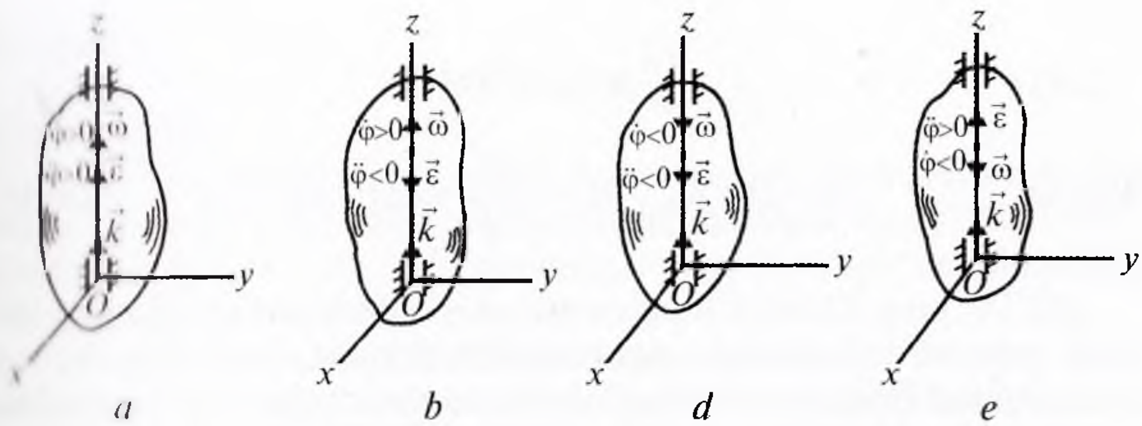
bu yerdan Δt ni nolga intiltirib limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \qquad (45.5)$$

(45.5) dan ko'ramizki, jismning burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan birinchi yoki burilish burchagidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.



82-rasm.



83-rasm.

Jism burchak tezlanishining vektori ($\vec{\varepsilon}$) ni aylanish o'qi bo'ylab tasvirlash mumkin (83-rasm):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{k}\frac{d\omega}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}\,. \qquad (45.6)$$

Jism burchak tezlanishining o'lchov birligi rad/s^2 yoki 1/s^2 bo'ladi. Jism aylanma harakatining xususiy hollari quyidagilardan iborat:

1. Agar burchak tezligi (ω=const) o'zgarmas bo'lsa, jism harakati tekis aylanma harakatdan iborat bo'ladi. Bu holda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const}\,,$$

bundan

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \qquad (45.7)$$

kelib chiqadi.

(45.7) tenglama tekis aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar $\varphi_0 = 0$ bo'lsa,

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (45.8)$$

bo'ladi.

Texnik masalalarni yechishda ko'pincha jismning 1 minutdagi aylanish soni n berilgan bo'ladi. Bu holda $\varphi = 2\pi n$, $t = 60$ s bo'lib,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{60} \qquad (45.9)$$

bo'ladi.

Ba'zi bir masalalarda ixtiyoriy t_1 vaqtdagi aylanish sonini topish talab etiladi. Bu holda aylanish soni N bilan belgilanib, u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\varphi = 2\pi N, \quad N = \frac{\varphi}{2\pi}\,. \qquad (45.10)$$

2. Agar burchak tezlanishi (ε=const) o'zgarmas bo'lsa, jism harakati tekis o'zgaruvchan harakatdan iborat bo'ladi. Bu holda:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \text{const}$$

bundan $$\omega = \varepsilon t + \omega_0, \quad \varphi = \pm\frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \qquad (45.11)$$

kelib chiqadi.

(45.11) ning ikkinchi tenglamasi tekis o'zgaruvchan aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar harakat tekis tezlanuvchan bo'lsa, masalani hal etishda ε oldidagi ishora musbat; tekis sekinlanuvchan bo'lsa, ε oldidagi ishora manfiy deb olinadi (83-rasm, *b, e*).

Jism harakati tekis tezlanuvchan bo'lganda burchak tezligi va burchak tezlanishining ishorasi bir xil bo'ladi (83-rasm, *a, d*).

46- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi va tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Faraz qilaylik, jism Oz o'qi atrofida ω burchak tezligi bilan aylanayotgan bo'lsin. Jismning aylanish o'qida yotmaydigan nuqtalar trayektoriyalari aylanalardan iborat bo'ladi. Mazkur aylanalar markazi aylanish o'qida yotadi. Jismning ixtiyoriy M nuqtasi tezligini aniqlaymiz (84-rasm).

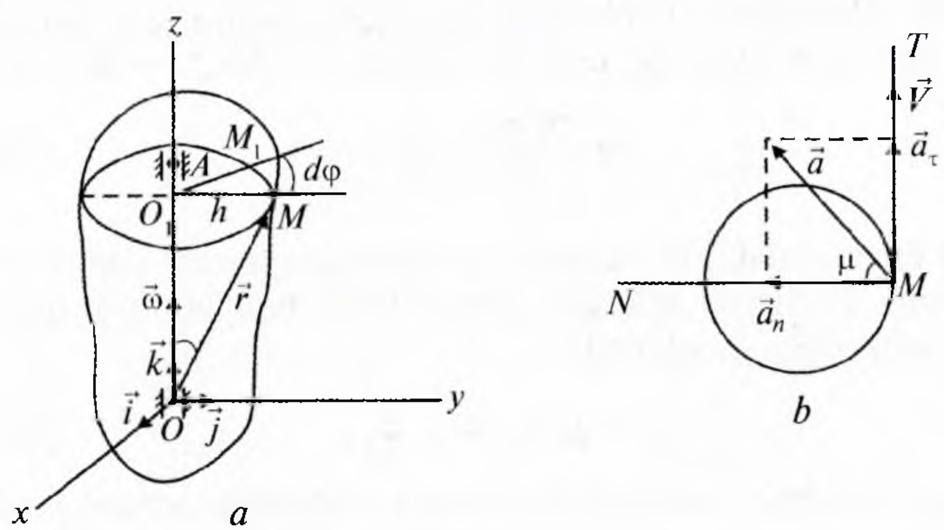
M nuqta chizgan aylana radiusi $h = O_1M$; $ds = MM_1$.

Matematikadan ma'lumki:

$$ds = hd\varphi. \qquad (46.1)$$

(46.1) ning ikki tomonini Δt ga bo'lamiz: $\frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$,

bu yerda $$\frac{ds}{dt} = V, \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$



84-rasm.

Natijada

$$V = \omega \cdot h \qquad (46.2)$$

kelib chiqadi.

Demak, aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi uning burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa ko‘paytmasiga teng. Ixtiyoriy nuqta tezligi *chiziqli tezlik* deb ataladi.

Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat deb qarash mumkin:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt}h; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{\rho},$$

bu yerda
$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \quad \rho = h\,.$$

Shuning uchun

$$a_\tau = \varepsilon h, \quad a_n = \omega^2 h,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (46.3)$$

bo‘ladi.

Demak, chiziqli tezlik, urinma, normal va to‘la tezlanishlarning tabiiy usulda aniqlanishi mos ravishda (46.2) va (46.3) formulalardan iborat.

84-rasm, *b* dan:
$$\mathrm{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (46.4)$$

(46.4) formuladan ko‘ramizki, burchak tezligi bilan burchak tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xil bo‘lgani sababli tezlanish bilan normal tezlanish (radius) orasidagi burchak μ o‘zgarmasdan qoladi. Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining chiziqli tezligi hamda tezlanishi mazkur nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofaga proporsional ravishda o‘zgaradi.

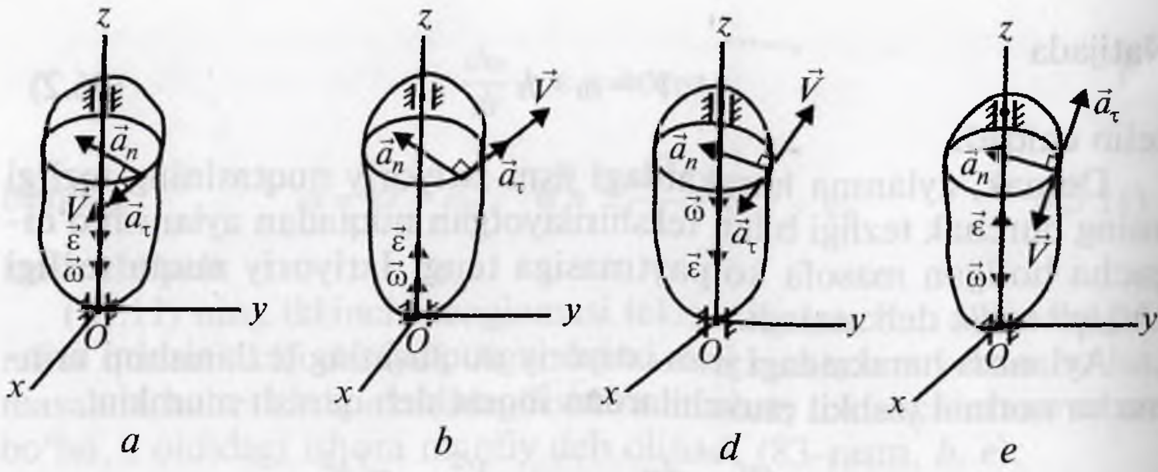
47- §. Chiziqli tezlik va tezlanish vektori

Jism ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorini $\vec{r}$ bilan belgilaymiz (84-rasm, *a*) .

ΔOO_1M dan:
$$\sin(\vec{\omega}\,\hat{}\,,\vec{r}) = \frac{h}{r},$$

$$h = r\sin(\vec{\omega}\,\hat{}\,,\vec{r})\,. \qquad (47.1)$$

(47.1) ni (46.2) ga qo‘yamiz: $V = \omega r\sin(\vec{\omega}\,\hat{}\,,\vec{r})\,,$



85-rasm.

bundan

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (47.2)$$

kelib chiqadi.

Demak, chiziqli tezlik vektori jism burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqta radius-vektorining vektor ko‘paytmasiga teng.

Chiziqli tezlanish vektorini aniqlash uchun (47.2) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

bunda $$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}.$$

Natijada $$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (47.3)$$

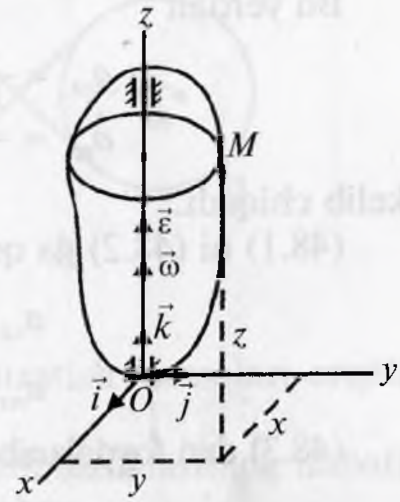
(47.3) formulada: $$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \; \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (47.4)$$

Demak, (47.3) chiziqli tezlanish vektorini, (47.4) ning birinchisi urinma (tangensial) tezlanish va ikkinchisi esa normal (markazga intilma) tezlanish vektorini ifodalaydi. Mazkur vektorlar yo‘nalishi 85-rasmda ko‘rsatilgan.

48- §. Chiziqli tezlik va tezlanishni koordinata usulida aniqlash

Faraz qilaylik, jism $Oxyz$ Dekart koordinata sistemasining Oz o‘qi atrofida aylanma harakat qilayotgan bo‘lsin (86-rasm). Jism ixtiyoriy M nuqtasining koordinalarini x, y, z; chiziqli tezlikning Ox, Oy, Oz o‘qlaridagi proyeksiyalarini V_x, V_y, V_z; burchak tezligi proyeksiyalarini ω_x, ω_y, ω_z desak, (47.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ x&y&z\end{vmatrix}$$



86-rasm.

yoki

$$V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}=\vec{i}\,(\omega_y z-\omega_z y)+$$
$$+\vec{j}\,(\omega_z x-z\omega_x)+\vec{k}\,(y\omega_x-x\omega_y).$$

Bu yerda $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarning birlik vektorlari.

Natijada $\quad V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}=\vec{i}\,(-\omega\cdot y)+\vec{j}\omega\cdot x$,

bundan

$$V_x=-\omega\cdot y,\ V_y=\omega\cdot x,\ V_z=0,\ V=\omega\sqrt{y^2+x^2}\,. \qquad (48.1)$$

Chiziqli tezlanishning urinma va normal tuzuvchilarini quyidagicha yozamiz:

$$\vec{a}_\tau=a_{\tau x}\vec{i}+a_{\tau y}\vec{j}+a_{\tau z}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \varepsilon_x&\varepsilon_y&\varepsilon_z\\ x&y&z\end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_n=a_{nx}\vec{i}+a_{ny}\vec{j}+a_{nz}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}.$$

Bu yerda: $a_{\tau x}$, $a_{\tau y}$, $a_{\tau z}$ — urinma; a_{nx}, a_{ny}, a_{nz} — normal, ε_x, ε_y, ε_z — burchak tezlanishning mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlaridagi proyeksiyalari bo'lib, $\varepsilon_x=0$, $\varepsilon_y=0$, $\varepsilon_z=\varepsilon$.

Natijada:

$$a_{\tau x}\vec{i}+a_{\tau y}\vec{j}+a_{\tau z}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 0&0&\varepsilon\\ x&y&z\end{vmatrix},$$

$$a_{nx}\vec{i}+a_{ny}\vec{j}+a_{nz}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 0&0&\omega\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}.$$

Bu yerdan

$$a_{\tau x} = -\varepsilon y, \ a_{\tau y} = -\varepsilon x, \ a_{\tau z} = 0,$$

$$a_{nx} = -\omega V_y, \ a_{ny} = \omega V_x, \ a_{nz} = 0 \qquad (48.2)$$

kelib chiqadi.

(48.1) ni (48.2) ga qo'ysak:

$$a_{\tau x} = -\varepsilon y, \ a_{\tau y} = \varepsilon x,$$

$$a_{nx} = -\omega^2 x, \ a_{ny} = -\omega^2 y. \qquad (48.3)$$

(48.3) dan foydalanib, chiziqli tezlanish proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$a_x = a_{\tau x} + a_{nx} = -\varepsilon y - \omega^2 x,$$

$$a_y = a_{\tau y} + a_{ny} = \varepsilon x - \omega^2 y. \qquad (48.4)$$

Chiziqli tezlanish miqdori esa

$$a = \sqrt{(-\varepsilon y - \omega^2 x)^2 + (\varepsilon x - \omega^2 y)^2} \qquad (48.5)$$

formuladan foydalanib aniqlanadi.

49- §. Aylanma harakatlarni bir jismdan ikkinchi jismga uzatish

Radiuslari r_1 va r_2 bo'lgan tishli g'ildiraklar bir-biri bilan tishlash-gan bo'lsin (87-rasm, *a, b*).

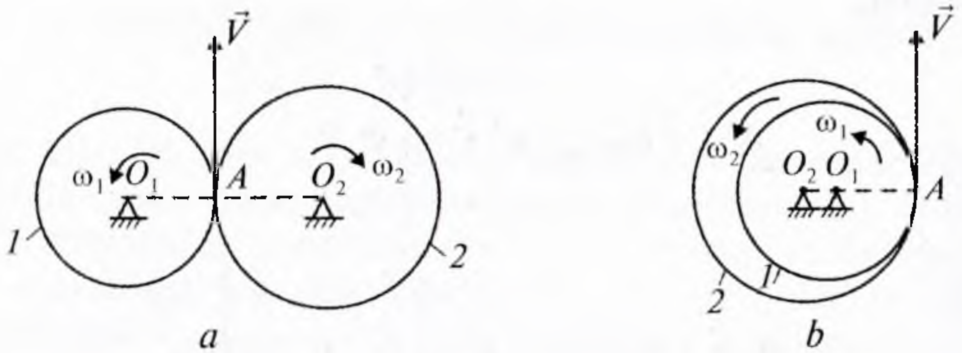
Birinchi g'ildirakni yetakchi, ikkinchisini esa yetaklanuvchi deb faraz qilaylik. Ikkala g'ildiraklarning bir-biriga tegib turgan nuqtalarining tezligi miqdor va yo'nalishi jihatidan bir xildir:

$$V_{1A} = V_{2A} \text{ yoki } \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

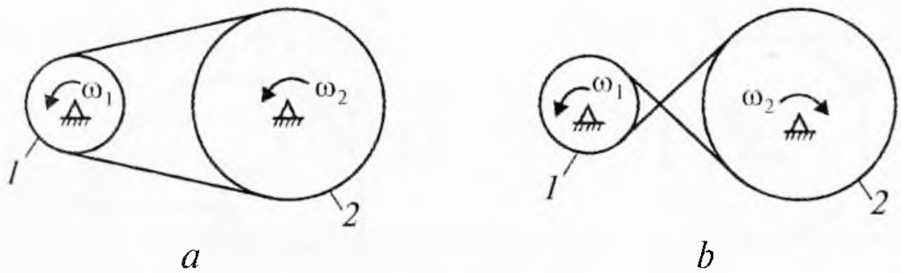
bundan,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (49.1)$$

kelib chiqadi.



87-rasm.



88-rasm.

(49.1) munosabat g'ildiraklar harakati uzatish tasmalari orqali bo'lganda ham o'rinlidir (88-rasm, *a, b*).

(49.1) dan ko'ramizki, g'ildiraklar burchak tezliklarining nisbati radiuslarining nisbatiga teskari proporsional ekan.

G'ildirak tishlari tashqi tomondan tishlashgan (87-rasm, *a*) bo'lsa yoki uzatma tasmalari ayqash bo'lsa (88-rasm, *b*), ular har xil tomonga aylanadi. Agar g'ildiraklar ichki tomondan tishlashgan (87-rasm, *b*) bo'lsa yoki uzatma tasmalari ayqash bo'lmasa (88-rasm, *a*), ular bir tomonga aylanadi.

G'ildiraklar burchak tezliklarining nisbati tishlar soni z_1, z_2 yoki aylanish soni n_1, n_2 orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_2}{r_1}. \qquad (49.2)$$

Yetakchi g'ildirak burchak tezligining yetaklanuvchi g'ildirak burchak tezligiga nisbati *uzatish soni* deb ataladi:

$$i_{1,2}=\omega_1/\omega_2\ . \qquad (49.3)$$

87-rasm, *b*, 88-rasm, *a* dagi g'ildiraklar uchun uzatish soni musbat; 87-rasm, *a*, 88-rasm, *b* dagi g'ildiraklar uchun uzatish soni manfiy bo'ladi.

Tishlashgan g'ildiraklar *n* (bir necha) juft bo'lsa, umumiy uzatish soni har bir juft g'ildirak uzatish sonlarining ko'paytmasiga teng:

$$i_{1,n}=i_{1,2}\cdot i_{2,3}\cdot\ldots\cdot i_{n-1,n},$$

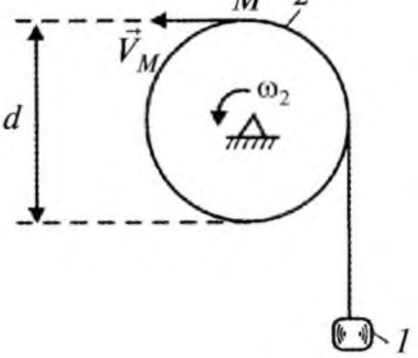
bundan

$$i_{1,n}=(-1)^m\frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (49.4)$$

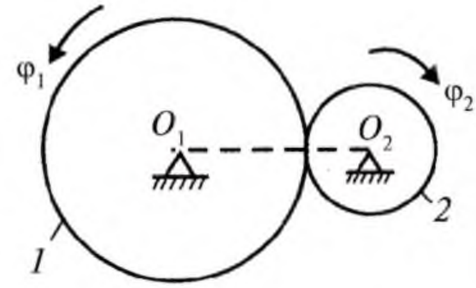
Bu yerda m — tashqi tomondan tishlashgan juft g'ildiraklar soni.

50- §. Masalalar

18-masala. Diametri d_2=0,8 m bo'lgan *2*-baraban $\varphi_2=3+\frac{1}{4}t^4$ qonunga ko'ra aylanib, *1*-yukni ko'taradi. t=1 sekund bo'lganda baraban M nuqtasining tezligi aniqlansin (89-rasm).



89-rasm.



90-rasm.

Yechish. (46.2) ga ko‘ra:

$$V_M = V_1 = \omega_2 r_2$$

yoki
$$V_M = \frac{d_2}{2}\omega_2 . \qquad (50.1)$$

ω_2 ni aniqlash uchun φ_2 dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = t^3 . \qquad (50.2)$$

(50.2) ni (50.1) ga qo‘yamiz:

$$V_M = \frac{d_2}{2}\cdot t^3 . \qquad (50.3)$$

(50.3) ga son qiymatlarni qo‘ysak, V_M=0,4 m/s kelib chiqadi.

19-masala. 1 va 2-g‘ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo‘lib, birinchi g‘ildirak φ_1=10 t qonunga muvofiq aylanadi. T=3,14 s bo‘lganda ikkinchi g‘ildirak aylanish soni aniqlansin. r_1=0,6 m; r_2=0,3 m (90-rasm).

Yechish. (45.10) ga ko‘ra:

$$\varphi_1 = 2\pi N_1,$$

bundan:
$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}. \qquad (50.4)$$

(49.2) formulaga asosan: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_2}{r_1}$,

bundan
$$N_2 = \frac{N_1 r_1}{r_2} \qquad (50.5)$$

kelib chiqadi.

(50.4) ni (50.5) ga qo‘yamiz:

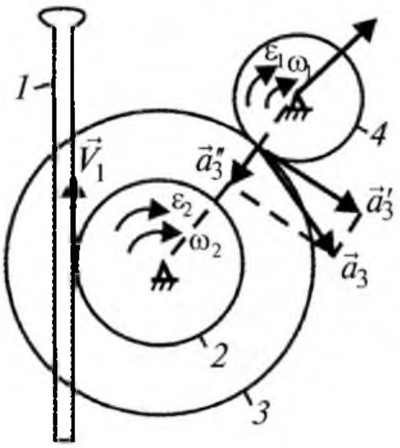
$$N_2 = \frac{\varphi_1}{2\pi}\cdot\frac{r_1}{r_2} = \frac{10t}{2\pi}\cdot\frac{r_1}{r_2}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak,

$$N_2 = \frac{10 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \frac{0{,}6}{0{,}3} \quad \text{yoki} \quad N_1 = 10 \text{ ayl}$$

kelib chiqadi.

20-masala. Strelka indikatori mexanizmida harakat o'lchov shtiftining *1*-reykasidan *2*-g'ildirakka uzatiladi; *2*-g'ildirakning o'qiga tishli *3*-g'ildirak o'tqazilgan. *3*-g'ildirak esa strelkali *4*-g'ildirak bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati $x = 2\cos\frac{\pi}{4}t$ (sm) tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari mos ravishda $r_2 = 10\sqrt{2}$ sm, $r_3 = 30\sqrt{2}$ sm, $r_4 = 10\sqrt{2}$ sm bo'lsa, strelkaning burchak tezligi hamda burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, $t = 1$ sekunddagi 3-g'ildirak to'g'inida yotuvchi nuqta tezligi va tezlanishi aniqlansin (91- rasm).



91-rasm.

Yechish. Shtift bilan *2*-g'ildirak tishlashgan nuqtalarining chiziqli tezliklari bir-biriga teng:

$$V_1 = V_2 = \omega_2 r_2. \tag{50.6}$$

Shtift tezligi esa

$$V_1 = \frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t \text{ (sm/s)}. \tag{50.7}$$

(50.7) ni (50.6) ga qo'ysak:

$$\omega_2 = -\frac{\pi}{2r_2}\sin\frac{\pi}{4}t \text{ (1/s)}.$$

Ikkinchi va uchinchi g'ildiraklar bir o'qda joylashganligi uchun ularning burchak tezliklari teng, ya'ni:

$$\omega_2 = \omega_3 = -\frac{\pi}{2r_2}\sin\frac{\pi}{4}t. \tag{50.8}$$

$t = 1$ sekund bo'lganda, $\omega_2 = \omega_3 = -0{,}078$ s^{-1}.

3- va 4-g'ildiraklarning tishlashgan nuqtalarining chiziqli tezliklari teng ($V_3 = V_4$):

$$V_3 = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4, \tag{50.9}$$

bu yerdan
$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3$$

kelib chiqadi.

4-g‘ildirak burchak tezligi strelka burchak tezligiga teng. Demak,

$$\omega_{st} = \omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = -\frac{\pi r_3}{2r_2r_4}\sin\frac{\pi}{4}t. \qquad (50.10)$$

t=1 s bo‘lganda $\omega_{st} = \omega_3 = 0,2355$ s^{-1} bo‘ladi.

3- va 4-g‘ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo‘lgani uchun ω_{st} yo‘nalishi ω_3 ga qarshi bo‘ladi.

Strelkaning burchak tezlanishi: $\varepsilon_{st} = \frac{d\omega_{st}}{dt} = -\frac{\pi^2 r_3}{8r_2r_4}\cos\frac{\pi}{4}t.$

t=1 s da $\varepsilon_{st} = -0,18$ s^{-2} bo‘ladi.

3-g‘ildirak to‘g‘inida yotuvchi nuqta tezligi (50.9) formulaga ko‘ra aniqlanadi:

$$V_3 = -\frac{\pi r_3}{2r_2}\sin\frac{\pi}{4}t.$$

t=1 sekund bo‘lganda $V_3 = -3,3$ sm/s bo‘ladi.

(50.8) dan vaqt bo‘yicha hosila olsak, 3-g‘ildirak burchak tezlanishi kelib chiqadi:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\pi^2}{8r_2}\cos\frac{\pi}{4}t.$$

t=1 s da $\varepsilon_3 = -0,06$ s^{-2}.

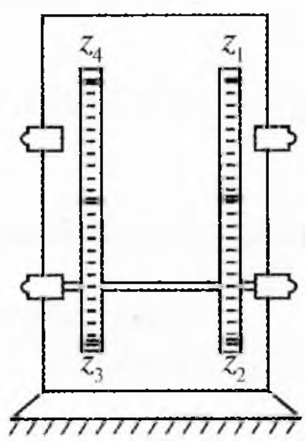
3-g‘ildirak to‘g‘inida yotuvchi nuqtaning urinma, normal va to‘la tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a_3^\tau = \varepsilon_3 r_3,\ a_3^n = \omega_3^2 r_3,\ a_3 = \sqrt{(a_3^\tau)^2 + (a_3^n)^2}. \qquad (50.11)$$

(50.11) ga aniqlangan son qiymatlarni qo‘ysak:

$$a_3^\tau = -2,538 \text{ sm/s}^2,\ a_3^n = 0,038 \text{ sm/s}^2,\ a_3 = 2,538 \text{ sm/s}^2$$

kelib chiqadi.



92-rasm.

21-masala. Aylanma harakatni I valdan II valga o‘tkazadigan tezlik reduktori qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanuvchi to‘rtta tishli g‘ildirakdan iborat. G‘ildiraklar tishlarining soni mos ravishda z_1=12, z_2=72, z_3=10, z_4=90. Mexanizmning uzatish soni topilsin (92-rasm).

Yechish: (49.3) formulaga ko‘ra:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},\ i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

2- va 3-g‘ildiraklar bitta valga mahkamlangan bo‘lib, tashqi tishlashgan juftlar soni 2 ga teng.

Shuning uchun $\omega_2 = \omega_3$ bo'lib, (49.4) quyidagicha bo'ladi:

$$i_{1,4} = (-1)^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Son qiymatlarini qo'ysak, $i_{1,4} = 54$ kelib chiqadi.

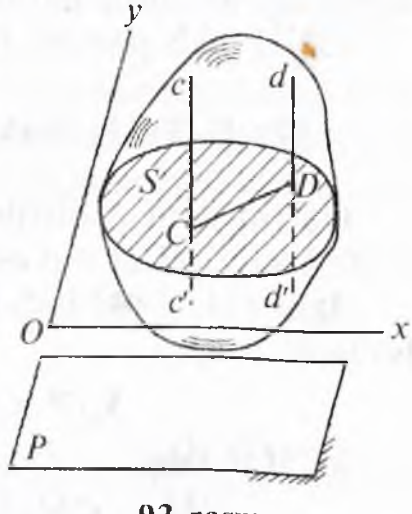
? *Nazorat savollari*

1. Jismning ilgarilanma harakati qanday ta'riflanadi?
2. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining harakati haqidagi teoremani ta'riflang.
3. Qattiq jismning aylanma harakati deb nimaga aytiladi?
4. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki tenglamasini yozing.
5. Burchak tezligi va burchak tezlanishi nima? Ularning o'lchov birliklari qanday?
6. Chiziqli tezlik qanday aniqlanadi?
7. Chiziqli tezlikning vektor ifodasi qanday?
8. Chiziqli tezlikning Dekart koordinata o'qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
9. Chiziqli tezlanish nima? Uning vektor ifodasini yozing.
10. Chiziqli tezlanish vektorini Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi ifodasini yozing.
11. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtasining urinma va normal (markazga intilma) tezlanishi qanday ifodalanadi?

X *BOB.* QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

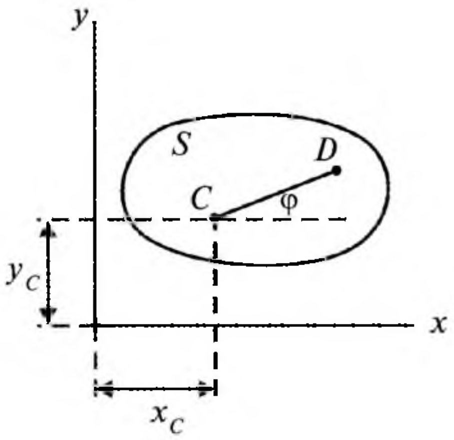
51- §. Tekis parallel harakat tenglamasi

Qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari biror qo'zg'almas P tekislikka parallel bo'lsa, bunday harakat *tekis parallel harakat* deyiladi (93-rasm). Bunday harakatga yo'lning to'g'ri chiziqli qismida harakatlanayotgan g'ildirakni, bir tekislikda harakatlanuvchi mashina va mexanizm qismlarini misol qilib keltirish mumkin.

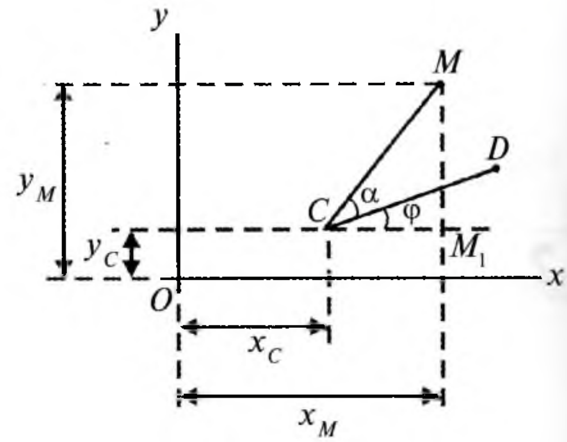


93-rasm.

Qattiq jism tekis parallel harakatini o'rganish uchun qo'zg'almas P tekislikka parallel qilib Oxy koordinata sistemasini o'tkazamiz. U jismdan P tekislikka paral-



94-rasm.



95-rasm.

lel bo‘lgan S qirqimni ajratadi. S qirqimga (ya’ni, P ga) perpendikular bo‘lgan cc' va dd' ustidagi nuqtalar bir xil harakatlanadi.

Shuning uchun bu chiziqlar ustida yotuvchi nuqtalar harakatini o‘rganish o‘rniga S qirqimda yotuvchi C (yoki D) nuqtalarning harakatini tekshirish kifoya.

Demak, qattiq jism tekis parallel harakatini o‘rganish uchun S qirqim harakatini bilish kifoya. Keyinchalik, S qirqimni tekis shakl deb ataymiz. Tekis shaklning holati unda olingan CD kesma holati orqali aniqlanadi (94-rasm). CD kesma holatini esa quyidagicha aniqlash mumkin:

$$x_C = x_C(t),\ y_C = y_C(t);\ \varphi = \varphi(t), \tag{51.1}$$

bu yerda C nuqta qutb deb ataladi. φ esa burilish burchagi bo‘lib, u CD kesmaning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchagidir.

(51.1) ning birinchi ikkita tenglamasi jism ilgarilama harakatini, uchinchisi esa qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Demak, jismning tekis parallel harakati C qutb nuqtaning ilgarilama va qutb C dan rasm tekisligi P ga perpendikular o‘tgan o‘q atrofidagi aylanma harakatdan iborat.

(51.1) tekis parallel harakat qonunini ifodalaydi.

52- §. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining trayektoriyasi

Qattiq jism S qirqimi ustidagi ixtiyoriy M nuqtaning holati $CM=b$ va $\angle MCD = \alpha$ orqali aniqlanadi (95-rasm).

Agar (51.1) ma’lum bo‘lsa, M nuqta koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x_M = x_C + CM_1,\quad y_M = y_C + MM_1. \tag{52.1}$$

ΔCMM_1 dan:

$$CM_1 = CM\cos(\alpha + \varphi),\quad MM_1 = CM\sin(\alpha + \varphi)$$

yoki $\quad CM_1 = CM\cos(\alpha + \varphi), \quad MM_1 = CM\sin(\alpha + \varphi). \quad (52.2)$

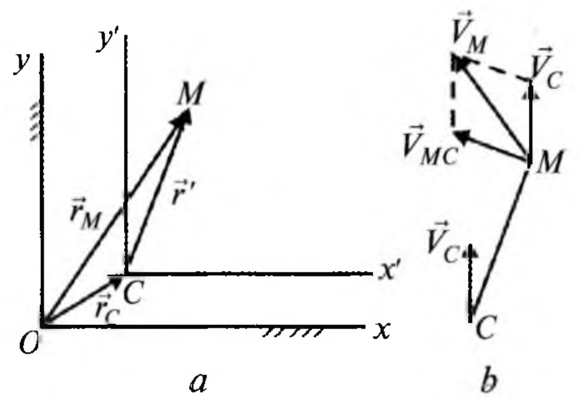
(52.2) ni (52.1) ga qo'ysak:

$$x_M = x_C + b\cos(\alpha + \varphi), \quad y_M = y_C + b\sin(\alpha + \varphi). \quad (52.3)$$

(52.3) formula tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi trayektoriyasining parametrik tenglamasidir.

53- §. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi

Qattiq jism S qirqimining holatini qo'zg'almas Oxy sistemaga nisbatan tekshiramiz (96-rasm). S qirqim C nuqtasini qutb deb olib, u nuqtadan jism bilan birgalikda ilgarilama harakat qiluvchi $Cx'y'$ koordinata sistemasini olamiz. Bu holda jism ixtiyoriy M nuqtasining holatini vektor usulda quyidagicha aniqlash mumkin:



96-rasm.

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}\,'. \quad (53.1)$$

(53.1) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

yoki

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}\,'$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\vec{V}\,' = \vec{V}_{MC}$ bo'lib, u M nuqtaning qutb atrofidagi aylanma harakat tezligidir.

Natijada: $$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}. \quad (53.2)$$

Demak, tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi qutb (nuqta)ning tezligi bilan mazkur nuqtaning qutb atrofidagi aylanma harakati chiziqli tezligining geometrik yig'indisiga teng (96-rasm, *b*).

(47.2) ga ko'ra:

$$\vec{V}_{MC} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \overline{CM}, \quad \vec{V}_{MC} \perp \vec{V}_C.$$

Natijada:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \overline{CM}.$$

Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy M nuqtasi tezligining kattaligi quyidagicha aniqlanadi:

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}, \tag{53.3}$$

bu yerda

$$V_{Mx} = V_{Cx} + V_{[MC]x},$$
$$V_{My} = V_{Cy} + V_{(MC)y}. \tag{53.4}$$

$\vec{V}_C \perp \vec{V}_{MC}$ bo'lsa, $V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2}$ bo'ladi.

$\vec{V}_C$ bilan V_{MC} ma'lum biror burchak hosil qilganda kosinuslar teoremasidan foydalanib, $\vec{V}_M$ kattalik topiladi .

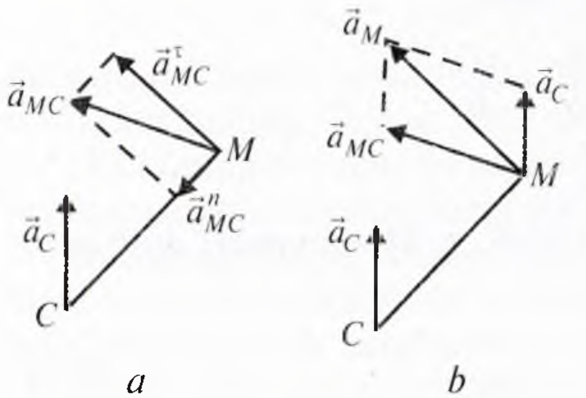
54- §. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi

Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy M nuqtasi tezlanishini aniqlash uchun (53.2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_C}{dt} + \frac{d\vec{V}_{MC}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}. \tag{54.1}$$



97-rasm.

(54.1) dan ko'ramizki, M nuqtaning tezlanish vektori qutb nuqta tezlanish vektori bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan to'la tezlanish vektorining geometrik yig'indisiga teng (97-rasm, *a, b*).

(54.1) dagi $\vec{a}_C$ va $\vec{a}_{MC}$ larni urinma va normal tuzuvchilarga ajratib yozsak:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_C^n, \quad \vec{a}_{MC} = \vec{a}_{MC}^\tau + \vec{a}_{MC}^n$$

bo'ladi.

Bu holda (54.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_C^n + \vec{a}_{MC}^\tau + \vec{a}_{MC}^n, \tag{54.2}$$

bu yerda:
$$a_C^\tau = \frac{dV_C}{dt}, \quad a_C^n = \frac{V_C^2}{\rho};$$
$$a_{MC}^\tau = \varepsilon MC, \quad a_{MC}^n = \omega^2 MC.$$

Jism tekis parallel harakatiga doir masalalarni yechishda (54.2) Dekart koordinata o'qlari *Ox, Oy*ga proyeksiyalanib, $\vec{a}_M$ kattalik aniqlanadi:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}\,, \qquad (54.3)$$

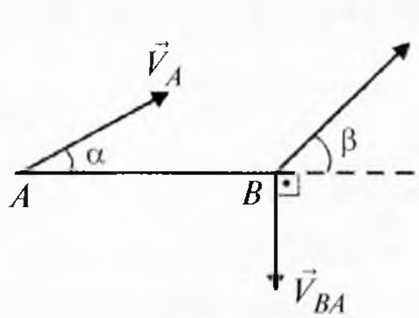
bu yerda

$$a_{Mx} = a_{Cx}^{\tau} + a_{Cx}^{n} + a_{(MC)x}^{\tau} + a_{(MC)x}^{n},$$

$$a_{My} = a_{Cy}^{\tau} + a_{Cy}^{n} + a_{(MC)y}^{\tau} + a_{(MC)y}^{n}. \qquad (54.4)$$

55- §. Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyasi haqidagi teorema

Teorema. *Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining mazkur nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq yo'nalishidagi proyeksiyalari teng* (98-rasm).



98-rasm.

Isbot. *A* nuqtani qutb desak, (53.2) ga ko'ra *B* nuqta tezligi quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}\,. \qquad (55.1)$$

(55.1) ni *AB* yo'nalishda proyeksiyalaymiz:

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha + V_{BA} \cos 90^\circ\,,$$

bunda $\cos 90^\circ = 0$ bo'lgani uchun:

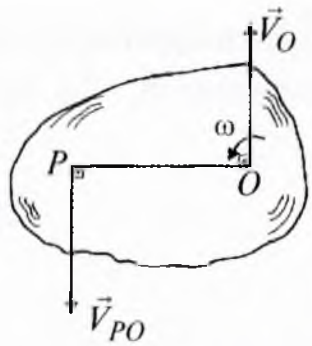
$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha \qquad (55.2)$$

kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbotlandi.

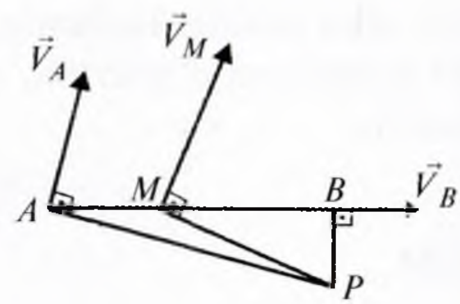
56- §. Tezliklar oniy markazi (TOM)

Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan tekis parallel harakatdagi jism nuqtasi *tezliklar oniy markazi* deyiladi. Bunday nuqta tekis parallel harakatdagi jismda mavjud ekanini ko'rsatib o'tamiz.

Faraz qilaylik, tekis parallel harakatdagi jism biror *O* nuqtasining tezligi V_O hamda *O* nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω berilgan bo'lsin (99-rasm). *O* nuqtani qutb deb olib, mazkur nuqtadan aylanma harakat yo'nalishida $\vec{V}_O$ ga perpendikular qilib $OP = \dfrac{V_O}{\omega}$ chiziqni o'tkazamiz.



99-rasm.



100-rasm.

(53.2) ga ko‘ra:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO},$$

bu yerda $\vec{V}_{PO} \perp OP$ bo‘lib, $\vec{V}_O$ ga qarama-qarshi yo‘naladi va

$$V_{PO} = \omega OP = \omega \frac{V_O}{\omega} = V_O$$

bo‘ladi.

Natijada $\vec{V}_{PO} = -\vec{V}_O$, $\vec{V}_P = 0$ kelib chiqadi.

Demak, tekis parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari yo‘nalishiga o‘tkazilgan perpendikular chiziqlar kesishgan nuqtasi TOM bo‘ladi (100-rasm).

P nuqtani qutb deb olsak, *A* va *B* nuqtalar tezliklari quyidagicha bo‘ladi:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}, \ \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}.$$

$\vec{V}_P = 0$ bo‘lgani uchun:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AP}, \ V_A = \omega AP, \ \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}, \ V_B = \omega BP. \qquad (56.1)$$

(56.1) dan: $$\omega = \frac{V_A}{AP}, \ \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (56.2)$$

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasining tezliklar yo‘-nalishi ma’lum bo‘lganda TOM aniqlanadi.

2) Tekis parallel harakatdagi jism bitta nuqtasi tezligining miq-dori va mazkur nuqtadan TOM gacha bo‘lgan masofa berilganda tekis parallel harakatdagi jism burchak tezligi topiladi.

3) Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi tezligini aniq-lash uchun uning bitta nuqtasi tezligining miqdori (kattaligi) va ikki nuqtasi tezliklarining yo‘nalishi ma’lum bo‘lishi kerak.

57- §. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari

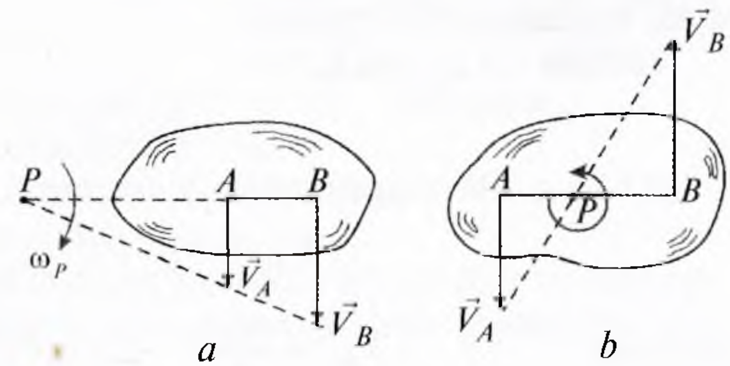
Tekis shaklda TOM quyidagi hollarda oson aniqlanadi:

1) Agar tekis shakl biror qo'zg'almas sirt ustida sirpanmasdan harakatlansa, uning qo'zg'almas sirtga tegib turgan nuqtasi TOM bo'ladi (101-rasm).

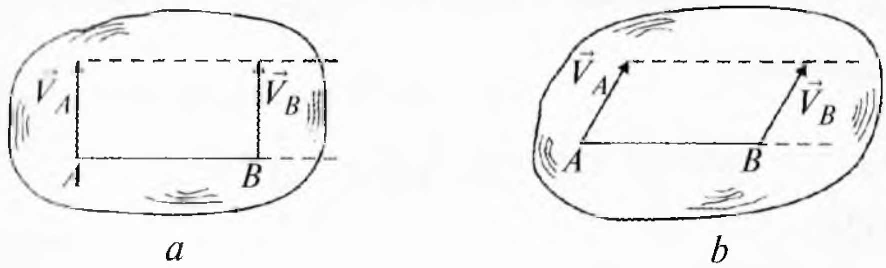
2) Agar tekis shakl A va B nuqtalarining tezliklar moduli ma'lum bo'lib, ular o'zaro parallel va AB ga perpendikular bo'lsa, mazkur tezliklar uchlarini tutashtiruvchi chiziqni AB bilan kesishguncha davom ettiramiz. Natijada hosil bo'lgan P nuqta TOM bo'ladi (102-rasm, *a, b*).

3) Agar $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$, $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ bo'lsa, jism ilgarilama harakatda bo'lib, tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi ($AP=\infty$) (103-rasm, *a, b*).

101-rasm.

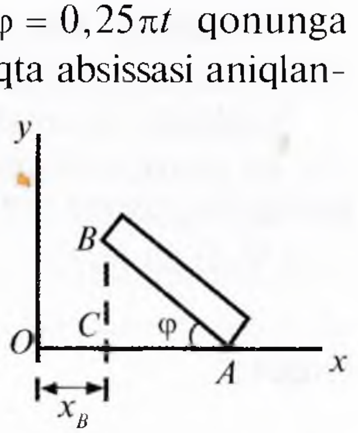


102-rasm.



103-rasm.

22-masala. AB sterjen $x_A = 2+t^2$, $y_A = 0$, $\varphi = 0{,}25\pi t$ qonunga ko'ra harakatlanadi. $t=1$ sekund bo'lganda B nuqta absissasi aniqlansin. $AB = 3$ m (104-rasm).



104-rasm.

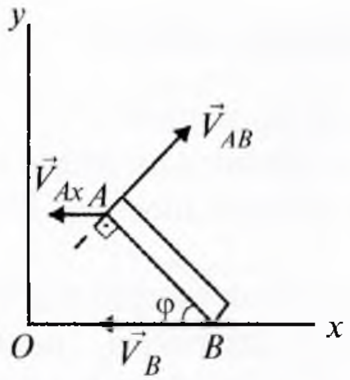
Yechish. 104-rasmdan:

$$x_B = OA - CA,\ x_B = x_A - AB\cos\varphi$$

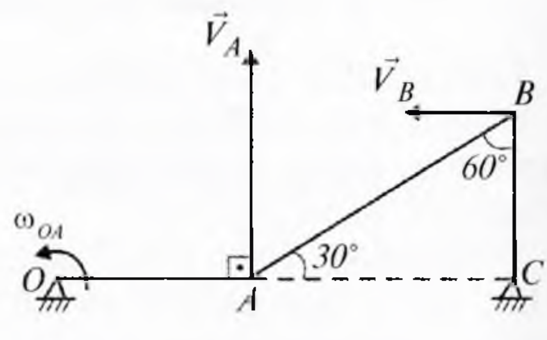
Formulaga son qiymatlarini qo'ysak:

$$x_B = 3 - 3\cos 0{,}25\pi = 3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

yoki $x_B = 0{,}879$ m.



105-rasm.



106-rasm.

23-masala. Uzunligi $AB = 2$ m bo‘lgan sterjen Oxy tekisligida x_B=4cos0,5πt, y_B=0, φ=0,5πt tenglamalarga muvofiq harakatlanadi. t=0,245s bo‘lganda A nuqta tezlik vektorining Ox o‘qidagi proyeksiyasi aniqlansin (105-rasm).

Yechish. (53.2) ga ko‘ra:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}. \tag{57.1}$$

(57.1) ni Ox o‘qiga proyeksiyalaymiz:

$$V_{Ax} = V_{Bx} + V_{(AB)x},$$

bu yerda
$$V_{Bx} = \frac{dx_B}{dt} = -2\pi \sin 0{,}5\pi t,$$

$$V_{AB} = \omega\, AB = \frac{d\varphi}{dt} AB = 0{,}5\pi AB, \quad V_{(AB)x} = V_{AB} \sin 0{,}5\pi\, t.$$

t=1 sekundda

$$V_{Bx} = -2\pi \sin\frac{\pi}{3}t = -\pi\sqrt{2}, \quad V_{(AB)x} = \frac{\pi}{2} 2\sin\frac{\pi}{4}\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Natijada

$$V_{Ax} = -\pi\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = -\pi\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ yoki } V_{Ax} = -2{,}22 \text{ m/s}.$$

24-masala. 106-rasmda ko‘rsatilgan krivoship-shatunli mexanizm B nuqtasining tezligi topilsin. A nuqta tezligi V_A = 1 m/s.

Yechish. Krivoship-shatunli mexanizm A nuqtasining tezligi OA ga perpendikular, B nuqtasining tezligi CB ga perpendikular bo‘lib, yo‘nalishi 106-rasmda ko‘rsatilgandek bo‘ladi.

(55.2) ga ko‘ra:

$$V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ,$$

bundan

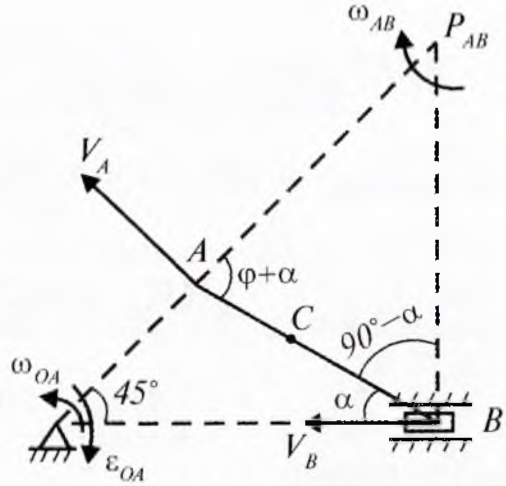
$$V_B = V_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$$

yoki son qiymatlarini qo'ysak,

$$V_B = 0{,}577 \text{ m/s}$$

kelib chiqadi.

25-masala. Krivoship-shatunli OAB mexanizmning krivoshipi o'zgarmas burchak tezlanishi bilan aylanadi va uzunligi AB=60 sm bo'lgan shatunni harakatga keltiradi. Krivoshipning uzunligi OA=20 sm, boshlang'ich burchak tezligi $\omega_{OA} = \pi$ s^{-1}, burchak tezlanishi $\varepsilon_{OA} = -\frac{\pi}{4}$ s^{-2}. Polzun B gorizontal bo'ylab harakat qiladi. Boshlang'ich paytda $\varphi_0 = -\frac{5}{4}\pi$ rad; t = 2 s bo'lganda shatunning burchak tezligi va burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, B polzun hamda AB shatun o'rtasidagi C nuqtaning tezlanishi topilsin (107- rasm).



107-rasm.

Yechish. Avval t=2 sekunddagi aylanish burchagi φ ni aniqlaymiz. Krivoship harakati tekis o'zgaruvchan aylanma harakatdan iborat bo'lgani uchun:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{OA}t + \varepsilon_{OA}\frac{t^2}{2}$$

bo'ladi.

φ_1 va ω_{OA} ning qiymatlarini qo'ysak:

$$\varphi = -\frac{5}{4}\pi + \pi t - \frac{\pi}{8}t^2$$

kelib chiqadi.

t_1=2 sekundda φ = 45° bo'ladi. Krivoship A nuqtasining burchak tezligi

$$\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \pi - \frac{\pi}{4}t = \frac{\pi}{4}(4-t) \text{ s}^{-1}.$$

Natijada: $\qquad V_A = 5\pi(4-t)$.

V_A OA krivoshipga perpendikular, B polzun tezligi gorizontal bo'ylab yo'nalgan. $\vec{V}_A$ va $\vec{V}_B$ vektorlarga A va B nuqtalardan chiqarilgan tik chiziqlarning kesishgan P_{AB} nuqtasi AB shatunning oniy aylanishlar markazi bo'ladi.

AB shatun burchak tezligini topamiz: $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP_{AB}}$.

107-rasmdan: $\dfrac{OA}{\sin\alpha} = \dfrac{l}{\sin\varphi}$, $\sin\alpha = \dfrac{OA\sin\varphi}{l}$.

Son qiymatlarini qo‘ysak: $\sin\alpha = 0{,}236$, $\alpha = 13°40'$.

ΔABP_{AB} dan: $\dfrac{AP_{AB}}{\sin(90°-\alpha)} = \dfrac{BP_{AB}}{\sin(\varphi+\alpha)} = \dfrac{AB}{\sin(90°-\varphi)}$,

bu yerdan, $AP_{AB} = AB\dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$, $BP_{AB} = AB\dfrac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi}$

yoki $$AP_{AB} = 60\frac{\cos 13°40'}{\cos 45°} = 82{,}68 \text{ sm},$$

$$BP_{AB} = 60\frac{\sin 58°40'}{\cos 45°} = 72 \text{ sm}$$

kelib chiqadi.

Demak, $$\omega_{AB} = \frac{5\pi(4-t)}{82{,}68}$$

yoki $t = 2$ s bo‘lganda $\omega_{AB} = 0{,}38 \text{ s}^{-1}$.

OA krivoship *A* nuqtasining tezlanishi urinma va markazga intilma (normal) tezlanishlarning geometrik yig‘indisidan iborat, ya’ni:

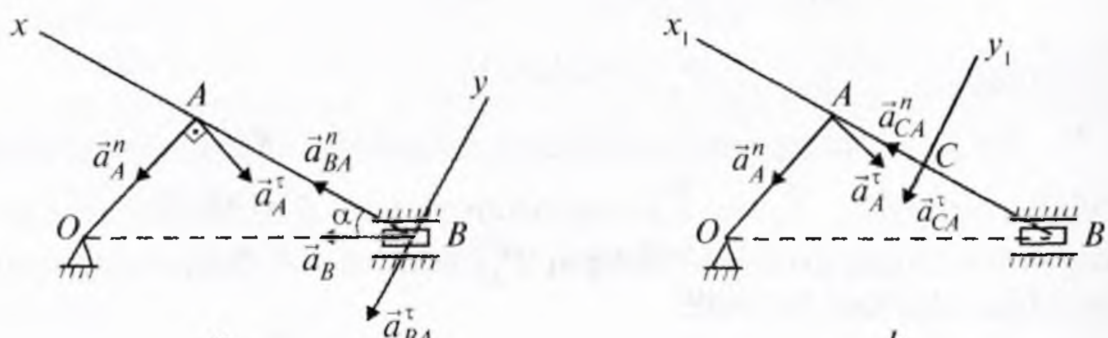
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n},$$

bu yerda $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA}\cdot OA$, $a_A^{n} = \omega_{OA}^2\cdot OA$,

yoki $a_A^{\tau} = 1{,}57 \text{ sm/s}^2$, $a_A^{n} = \dfrac{\pi^2}{16}(4-t^2)20$.

$t = 1$ s bo‘lganda $a_A^{n} = 5\pi^2 = 49{,}3 \text{ sm/s}^2$.

$\vec{a}_A^{\tau}$, $\vec{a}_A^{n}$ vektorlarning yo‘nalishi 108-rasmda ko‘rsatilganidek bo‘ladi.



108-rasm.

A nuqtani qutb deb, B polzun tezlanishini (54.2) ga ko'ra aniqlaymiz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n,$$

bu yerda $\vec{a}_B$ vektor OB bo'ylab yo'naladi.

Yuqoridagi tenglikni Bx, By o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_B \cos\alpha = -a_A^\tau \sin(\varphi+\alpha) + a_A^n \cos(\varphi+\alpha) + a_{BA}^n, \qquad (57.2)$$

$$-a_B \sin\alpha = -a_A^\tau \cos(\varphi+\alpha) - a_A^n \sin(\varphi+\alpha) - a_{BA}^\tau. \qquad (57.3)$$

$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB$ formuladan foydalanib, B nuqta aylanma harakatining normal tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_{BA}^n = (0{,}38)^2 \cdot 60 = 8{,}664 \text{ sm/s}^2.$$

(57.2) dan: $a_B = \dfrac{1}{\cos\alpha}\left[a_{BA}^n + a_A^n \cos(\varphi+\alpha) - a_A^\tau \sin(\varphi+\alpha)\right]$

yoki $$a_B = 21{,}5 \text{ sm/s}^2;$$

(57.3) dan: $a_{BA}^\tau = a_B \sin\alpha - a_A^\tau \cos(\varphi+\alpha) - a_A^n \sin(\varphi+\alpha)$

yoki $$a_{BA}^\tau = -45{,}2 \text{ sm/s}^2$$

kelib chiqadi.

Demak, $\vec{a}_{BA}^\tau$ vektor 108-rasm, *a* dagi yo'nalishga teskari ekan.

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ dan foydalanib, AB shatunning burchak tezlanishini topamiz:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}$$

yoki $$\varepsilon_{AB} = \frac{45{,}2}{60} = 0{,}75 \text{ s}^{-2}.$$

C nuqta tezlanishini aniqlash uchun A nuqtani qutb deb (54.2) ni yozamiz:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{CA}^n.$$

Bu tenglikni Cx, Cy o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_{Cx_1} = -a_A^\tau \sin(\varphi+\alpha) + a_A^n \cos(\varphi+\alpha) + a_{CA}^n,$$

$$a_{Cy_1} = -a_A^\tau \cos(\varphi+\alpha) - a_A^n \sin(\varphi+\alpha) - a_{CA}^\tau,$$

bunda $$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} AC = 0{,}75 \cdot 30 = 2{,}2 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 AC = 0{,}38^2 \cdot 30 = 4{,}332 \text{ sm/s}^2.$$

Natijada,

$$a_{Cx_1} = 16{,}6 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_{Cy_1} = -50{,}3 \text{ sm/s}^2$$

kelib chiqadi.

C nuqtaning to'la tezlanishi

$$a_C = \sqrt{a_{Cx_1}^2 + a_{Cy_1}^2} = \sqrt{(16{,}6)^2 + (-50{,}3)^2} = 52{,}8$$

bo'ladi.

Javob: ω_{AB}=0,38 1/s, ε_{AB}=0,75 1/s, a_B=21,5 sm/s^2, a_C=52,8 sm/s^2.

? ***Nazorat savollari***

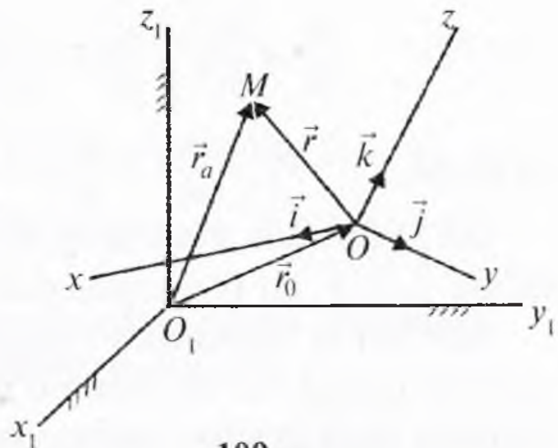
1. Qattiq jismning tekis parallel harakatining ta'rifi qanday?
2. Tekis parallel harakat qonunida nima aks etgan?
3. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari qanday aniqlanadi?
4. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori qanday topiladi?
5. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Tezliklar oniy markazi qanday ta'riflanadi?
7. Tezliklar oniy markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?
8. Tezliklar oniy markazi tushunchasidan foydalanib jism ixtiyoriy nuqtasi tezligi qanday topiladi?
9. Tekis harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyasi haqidagi teorema haqida nimalarni bilasiz?
10. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik miqdori qanday aniqlanadi?
11. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish miqdori qanday topiladi?

XI BOB. MODDIY NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

58- §. Moddiy nuqtaning nisbiy, ko'chirma va murakkab (absolut) harakati. Murakkab harakat qonuni

Yuqorida qayd etilgan mavzularda moddiy nuqta harakatini bitta qo'zg'almas sistemaga nisbatan tekshirilishini ko'rib o'tdik. Mazkur mavzuda moddiy nuqta harakatini ikkita koordinata sistemasiga, ya'ni qo'zg'aluvchi $Oxyz$ hamda qo'zg'almas $Ox_1y_1z_1$ sistemaga nisbatan tekshiramiz (109-rasm).

M nuqtaning qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinata sistemasiga nisbatan harakati *nisbiy*; qo'zg'aluvchi sistema bilan birgalikdagi harakati *ko'chirma*; qo'zg'almas $Ox_1y_1z_1$ koordinata sistemaga nisbatan harakati *murakkab (absolut) harakat* deb ataladi .



109-rasm.

Harakatdagi sistema boshining qo'zg'almas sistemaga nisbatan radius-vektorini $\vec{r}_0$, M nuqtaning harakatdagi sistemaga nisbatan holati radius-vektorini $\vec{r}$ va qo'zg'almas sistemaga nisbatan radius-vektorini $\vec{r}_a$ bilan belgilaymiz.

109-rasmdan:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_0 + \vec{r} \,. \tag{58.1}$$

(58.1) formula moddiy nuqta murakkab harakatining qonunini ifodalaydi.

Tezlik va tezlanishlarni bir-biridan farq qilish uchun absolut, nisbiy, ko'chirma tezlik vektorlarini mos ravishda $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$ va $\vec{V}_e$ bilan, shuningdek tezlanish vektorlarini $\vec{a}_a$, $\vec{a}_r$ va $\vec{a}_e$ bilan belgilanadi. Absolut tezlanishni tekshirganimizda qo'shimcha (Koriolis) tezlanish $\vec{a}_k$ kelib chiqadi.

59- §. Murakkab (absolut) harakatdagi moddiy nuqta tezligi (tezliklarni qo'shish teoremasi)

Absolut tezlikni aniqlash uchun (58.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{59.1}$$

bu yerda:
$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{V}_a, \quad \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{V}_0 \,. \tag{59.2}$$

$\vec{r}$ radius-vektorni quyidagicha yozib olamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{59.3}$$

bu yerda: x, y, z — radius-vektor $\vec{r}$ ning $Oxyz$ sistemaga nisbatan koordinatalari; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining birlik vektorlari.

(59.3) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}, \qquad (59.4)$$

bu yerda $$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \qquad (59.5)$$

(59.5) formula nuqtaning nisbiy tezligini ifodalaydi. Uni hisoblashda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar o'zgarmas deb qaraladi.

Agar qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi $\vec{\omega}_e$ ma'lum bo'lsa, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — vektorlar uchlarining tezliklari quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}. \qquad (59.6)$$

(59.5) va (59.6) ni (59.4) ga qo'ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + x \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{i} + y \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{j} + z \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{k}$$

yoki

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}). \qquad (59.7)$$

(59.3) ni (59.7) ga qo'ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \qquad (59.8)$$

(59.2) va (59.8) ni e'tiborga olib , (60.1) ni quyidagicha yozamiz:

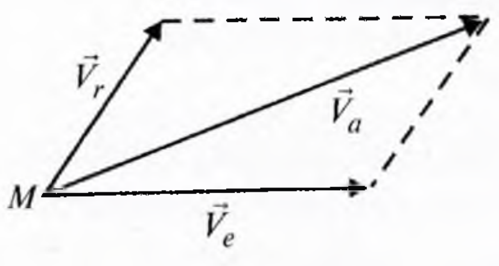
$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r},$$

bu yerda $$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \qquad (59.9)$$

(59.9) nuqtaning ko'chirma tezligini ifodalaydi.

Natijada $$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (59.10)$$

(59.10) murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teoremani ifodalaydi: nuqtaning absolut harakat tezligi mazkur nuqta nisbiy va ko'chirma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng (110-rasm).



110-rasm.

Shunday qilib , nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari miqdor va yo'nalish jihatidan ma'lum bo'lsa, absolut tezlikning moduli nisbiy va ko'chirma tezliklarga qurilgan parallelogrammning diagonali bilan ifodalanadi. Absolut tezlik moduli kosinuslar teoremasidan foydalanib topiladi:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\vec{V}_r\,\hat{}\,,\vec{V}_e)}\,. \qquad (59.11)$$

Agar $\alpha = 90°$ bo‘lsa, $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$; $\alpha = 0°$ bo‘lsa, $V_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$; $\alpha = 180°$ bo‘lsa, $V_a = |V_r - V_e|$ bo‘ladi.

60- §. Murakkab (absolut) harakatdagi nuqta tezlanishi (tezlanishlarni qo‘shish teoremasi)

Absolut tezlanishni aniqlash uchun (59.10) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_e}{dt}\,. \qquad (60.1)$$

(59.5) dan foydalanib, $\frac{d\vec{V}_r}{dt}$ ni aniqlaymiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\,. \qquad (60.2)$$

(59.6) ni (60.2) ga qo‘ysak:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})\,, \qquad (60.3)$$

bu yerda

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\,. \qquad (60.4)$$

(60.4) formula nuqtaning nisbiy tezlanishini ifodalaydi.

(59.5) va (60.4) ni (60.3) ga qo‘yamiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\,. \qquad (60.5)$$

Bundagi $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ ifoda nisbiy harakatdagi ko‘chirma tezlik o‘zgarishini xarakterlaydi .

(59.9) dan foydalanib, $\frac{d\vec{V}_e}{dt}$ ni topamiz:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt}\,, \qquad (60.6)$$

bu yerda:

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0\,, \quad \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e\,.$$

Natijada:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt}\,. \qquad (60.7)$$

(60.8) ni (61.7) ga qo'ysak:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r} \,. \qquad (60.8)$$

Bunda $\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ ko'chirma tezlikni, $\vec{\omega}_e \times \vec{r}$ esa ko'chirma harakatdagi nisbiy tezlik o'zgarishini xarakterlaydi. Bularni e'tiborga olsak, (61.8) quyidagicha bo'ladi :

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r} \,. \qquad (60.9)$$

(60.5) va (60.9) ni (60.1) ga qo'ysak :

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{r}$$

yoki

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k \,, \qquad (60.10)$$

bu yerda

$$2\vec{\omega}_e \times \vec{r} = \vec{a}_k \,. \qquad (60.11)$$

(60.11) formula Koriolis (qo'shimcha) tezlanishini ifodalaydi.

(60.10) formula tezlanishlarni qo'shish teoremasidan iborat.

Ta'rif. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolut tezlanishi uning nisbiy,ko'chirma va qo'shimcha tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Absolut tezlanish modulini hisoblash uchun (60.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_k \,, \qquad (60.12)$$

bu yerda

$$a_r^{\tau} = \frac{d\vec{V}_r}{dt}, \quad a_r^{n} = \frac{V_r^2}{\rho}, \quad a_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot h, \quad a_e^{n} = \omega_e^2 \cdot h \,, \qquad (60.13)$$

$$a_k = 2\omega_e V_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{V}_r) \,. \qquad (60.14)$$

(60.12) formuladagi $\vec{a}_r^{\tau}$ nisbiy harakat trayektoriyasiga urinma, $\vec{a}_r^{n}$ esa $\vec{a}_r^{\tau}$ ga perpendikular bo'lib, trayektoriyaning botiq tomoni bo'ylab yo'naladi; $\vec{a}_e^{\tau}$ ko'chirma harakat trayektoriyasiga urinma, $\vec{a}_e^{n} \perp \vec{a}_e^{\tau}$ bo'lib, trayektoriyaning botiq tomoni bo'ylab yo'naladi.

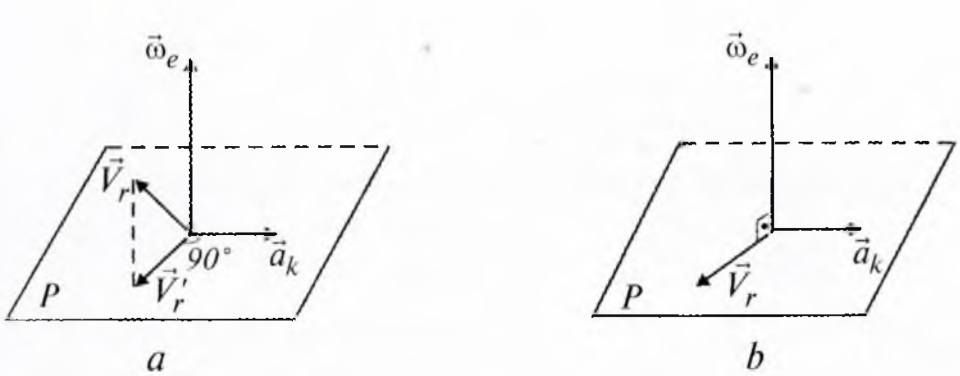
Koriolis tezlanishi yo'nalishi Jukovskiy qoidasi bo'yicha topiladi:

1) ko'chirma harakat burchak tezligi yo'nalishiga perpendikular *P* tekislik o'tkaziladi;

2) nisbiy harakat tezligi ($\vec{V}_r$) ni *P* tekislikka proyeksiyalab, uni $\vec{V}_r'$ deb belgilaymiz;

3) $\vec{V}_r'$ ni ko'chirma harakat aylanishi tomoniga 90° ga buramiz.

Natijada hosil bo'lgan yo'nalish Koriolis tezlanishi yo'nalashini ifodalaydi (111-rasm, *a*).



111-rasm.

Agarda $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$ bo‘lsa, $\vec{a}_k$ yo‘nalishini topish uchun $\vec{V}_r$ ni ko‘chirma harakat aylanishi tomoniga 90° ga buramiz (111-rasm, *b*).

(60.13) va (60.14) formulalarga ko‘ra tezlanishlar modullari hamda barcha tezlanishlar yo‘nalishi aniqlangandan so‘ng, (60.12) formula tanlab olingan *Ox, Oy, Oz* o‘qlariga proyeksiyalanadi, ya’ni:

$$a_{ax} = a_{rx}^{\tau} + a_{rx}^{n} + a_{ex}^{\tau} + a_{ex}^{n} + a_{kx},$$

$$a_{ay} = a_{ry}^{\tau} + a_{ry}^{n} + a_{ey}^{\tau} + a_{ey}^{n} + a_{ky},$$

$$a_{az} = a_{rz}^{\tau} + a_{rz}^{n} + a_{ez}^{\tau} + a_{ez}^{n} + a_{kz},$$

bu yerdan

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}$$

kelib chiqadi.

(60.14) dan foydalanib quyidagi xususiy hollarni keltirib o‘tamiz:

1. Qo‘zg‘aluvchi koordinata sistemasi ilgarlama harakatda $\omega_e=0$ bo‘lsa, $a_k=0$ bo‘ladi.

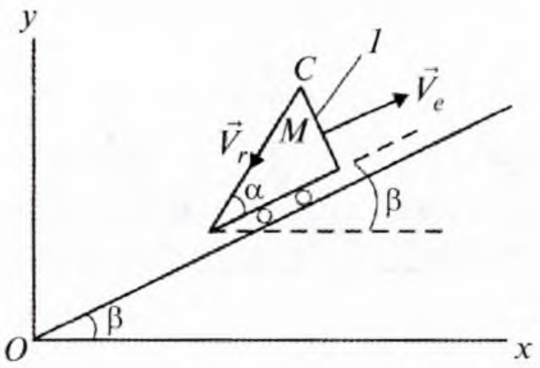
2. Berilgan onda nuqtaning nisbiy tezligi nolga teng bo‘lsa, $a_k=0$ bo‘ladi.

3. Berilgan onda ko‘chirma harakat burchak tezligi nisbiy harakat tezligiga parallel $[(\omega_e\,\hat{,}\,\vec{V}_r) = 0,\ (\omega_e\,\hat{,}\,\vec{V}_r) = 180°]$ bo‘lsa, $a_k=0$ bo‘ladi.

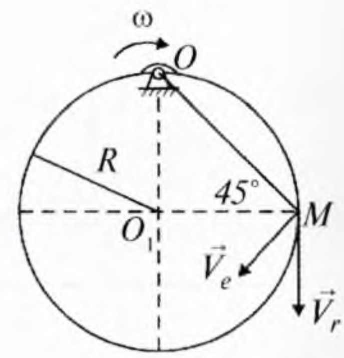
61- §. Masalalar

26-masala. Rasmda ko‘rsatilgan 1-jism qiya tekislik bo‘ylab $V_e=2$ m/s tezlik bilan tekis harakat qiladi. Mazkur jismga nisbatan M nuqta $CM=s_r=0{,}5t$ (m) qonunga ko‘ra harakatlanadi. $t=2$ sekund bo‘lganda M nuqta absissasi aniqlansin. $t=0$ da $x=0$; $\alpha = \beta = 30°$ (112-rasm).

Yechish. 112-rasmda ko‘rsatilgan 1-jism tekis harakatda bo‘lgani uchun: $s_e = V_e t$.



112-rasm.



113-rasm.

M nuqta absissasini aniqlash uchun uning nisbiy va ko'chirma harakatdagi ko'chishlarini Ox o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$s_{rx} = -CM\cos(\alpha + \beta), \quad s_{ex} = V_e t \cos\beta.$$

Natijada

$$x = s_{rx} + s_{ex} = -CM\cos(\alpha + \beta) + V_e t \cos\beta.$$

Son qiymatlarini qo'ysak , x=2,96 m kelib chiqadi.

27-masala. M nuqta radiusi R=0,1 m bo'lgan disk gardishi bo'ylab $OM=s_r$=0,3t (m) qonuniga ko'ra harakat qiladi. Diskning O o'q atrofidagi aylanishi φ_e=0,4t qonun bilan berilgan. M nuqtaning absolut tezligi aniqlansin (113-rasm).

Yechish. M nuqtaning nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi R bo'lgan aylanadan iborat bo'lib, nisbiy tezligining yo'nalishi 113-rasmdagidek bo'ladi.

Nisbiy tezlik miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 0{,}3 \text{ (m/s)}.$$

M nuqtaning ko'chirma harakat trayektoriyasining radiusi OM bo'lgan aylana bo'lib, tezlik OM ga perpendikular ravishda harakat aylanishi tomon yo'naladi .

Ko'chirma tezlik moduli:

$$V_e = \omega_e \cdot OM = \frac{d\varphi_e}{dt} \cdot OM,$$

bu yerda

$$\frac{d\varphi_e}{dt} = 0{,}4 \text{ rad/s}, OM = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Natijada: $V_e = 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{2} = 0{,}0564$ m/s.

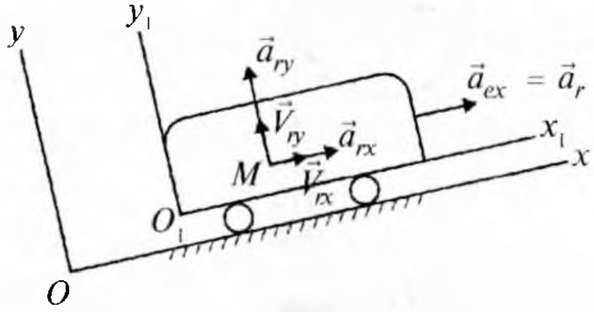
ΔOMO_1 teng yonli bo'lgani uchun $OM^\wedge, OM_1 = 45°$ bo'lib, $\vec{V}_r{}^\wedge, \vec{V}_e = 45°$.

(59.11) ga ko‘ra:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos 45^\circ}\,.$$

Son qiymatlarni qo‘ysak, V_a=0,342 (m/s) kelib chiqadi.

28-masala. Aravacha qiya tekislik bo‘ylab a_e=2 m/s ($a_e \parallel Ox$) tezlanish bilan harakat qiladi. Aravachadagi M nuqta $x_1=3t^2$, $y_1=4t^2$ qonunga muvofiq harakatlanadi ($Ox_1 \parallel Ox$). M nuqtaning absolut tezlanishi topilsin (114-rasm) (x_1, y_1 — metr, t — sekund hisobida).



114-rasm.

Yechish. M nuqta nisbiy tezligini aniqlaymiz. Masala shartiga ko‘ra:

$$x_r = x_1 = 3t^2,\quad y_r = y_1 = 4t^2,$$

bu yerdan:

$$V_{rx} = \dot{x}_1 = 6t,\quad V_{ry} = \dot{y}_1 = 8t.$$

Nisbiy harakat tezlanishining Ox, Oy o‘qlaridagi proyeksiyalari:

$$a_{rx} = \frac{dV_{rx}}{dt} = 6\ \text{m/s}^2,\ a_{ry} = \frac{dV_{ry}}{dt} = 8\ \text{m/s}^2. \qquad (61.1)$$

Ko‘chirma harakat tezlanishining Ox, Oy o‘qlaridagi proyeksiyalari:

$$a_{ex} = 2\ \text{m/s}^2,\quad a_{ey} = 0. \qquad (61.2)$$

Ko‘chirma harakat ilgarilama harakatdan iborat bo‘lgani uchun a_c=0 bo‘ladi. Shuning uchun (60.10) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e\,. \qquad (61.3)$$

(61.3) ni Ox, Oy o‘qlariga proyeksiyalasak:

$$a_{ax} = a_{rx} + a_{ex}\,;\ a_{ay} = a_{ry} + a_{ey}\,. \qquad (61.4)$$

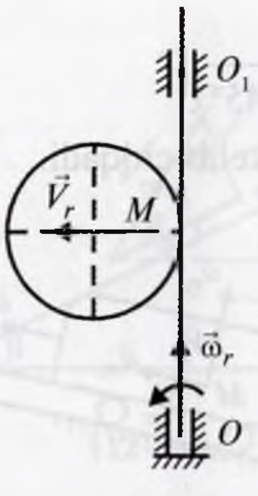
(61.1) va (61.2) ni (61.4) ga qo‘ysak:

$$a_{ax} = 6 + 2 = 8\ \text{m/s}^2,\quad a_{ay} = 8\ \text{m/s}^2.$$

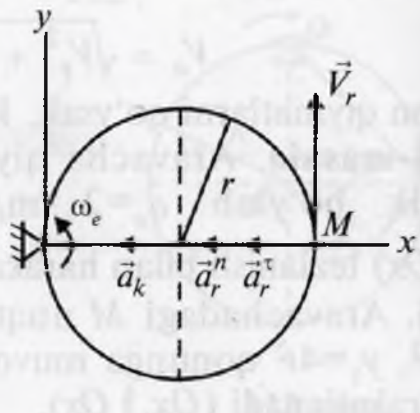
Demak, $\qquad a_a = 8\sqrt{2} = 11{,}28\ \text{m/s}^2\,.$

29-masala. Vertikal OO_1 o‘q atrofida $\omega_e=2t$ (1/s) burchak tezligi bilan aylanayotgan disk diametri bo‘ylab M nuqta $V_r = 4t$ (m/s) tezlik bilan harakatlanadi. $t = 2$ sekund bo‘lganda M nuqtaning Koriolis tezlanishi aniqlansin (115-rasm).

Yechish. Bizga ma’lumki, Koriolis tezlanishi (60.14) formuladan aniqlanar edi, ya’ni:



115-rasm.



116-rasm.

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \,\hat{,}\, \vec{V}_r).$$

Masala shartiga ko‘ra $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$, bo‘lgani uchun

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ \tag{61.5}$$

bo‘ladi. Berilganlarni (61.5) ga qo‘ysak:

$$a_k = 2 \cdot 2t \cdot 4t = 16t^2$$

kelib chiqadi.

$t = 2$ sekund bo‘lganda

$$a_k = 16 \cdot 4 = 64 \text{ m/s}^2$$

bo‘ladi.

30-masala. Radiusi $r = 0{,}5$ m bo‘lgan halqa ω_e=4 (rad/s) o‘zgarmas burchak tezligi bilan rasm tekisligida aylanadi. Halqa bo‘ylab M nuqta V_r=2 m/s o‘zgarmas tezlik bilan harakat qiladi. M nuqtaning 116-rasmda ko‘rsatilgan holati uchun absolut tezlanishi topilsin.

Yechish. M nuqta nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi r bo‘lgan aylanadan iborat bo‘lib, o‘zgaramas tezlik bilan harakat qiladi (V_r=const). Shu sababli:

$$a_r^\tau = 0, \; a_r^n = \frac{V_r^2}{r}$$

yoki
$$a_r^\tau = 0, \; a_r^n = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ m/s}^2. \tag{62.6}$$

M nuqta ko‘chirma harakat trayektoriyasi radiusi $2r$ bo‘lgan aylana bo‘lib ω_e=const. Shuning uchun

$$a_e^\tau = 0, \; a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM$$

yoki
$$a_e^\tau = 0, \; a_e^n = 16{,}2 \cdot 0{,}5 = 16 \text{ m/s}^2.$$

Halqa rasm tekisligida aylangani sababli $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$ bo'lib,

$$a_k = 2\omega_e V_r \cdot \sin 90^\circ$$

yoki $$a_k = 16 \text{ m/s}^2$$ bo'ladi.

Rasmga $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_k$ yo'nalishlarini qo'ysak, ular Ox o'qi bo'ylab joylashadi.

Demak, M nuqta absolut tezlanishining moduli quyidagicha bo'ladi:

$$a_a = a_r^n + a_e^n + a_k$$

yoki $$a_a = 40 \text{ m/s}^2.$$

? *Nazorat savollari*

1. Moddiy nuqtaning qanday harakati nisbiy harakat deyiladi?
2. Moddiy nuqtaning qanday harakati ko'chirma harakat deyiladi?
3. Moddiy nuqtaning murakkab harakati qonuni qanday?
4. Moddiy nuqtaning absolut tezligi qanday aniqlanadi?
5. Moddiy nuqtaning absolut tezlanishi qanday aniqlanadi?
6. Koriolis (qo'shimcha) tezlanish nima?
7. Nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezlanishi nima?
8. Tezliklarni qo'shish teoremasi haqida nimalarni bilasiz?
9. Tezlanishlarni qo'shish teoremasini ta'riflang.
10. Moddiy nuqtaning ko'chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo'lganda absolut tezlanish qanday topiladi?
11. Qanday holda Koriolis tezlanish nolga teng bo'ladi?
12. Koriolis tezlanish yo'nalishi qanday aniqlanadi?

UCHINCHI BO'LIM

DINAMIKA

XII BOB. DINAMIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI. MODDIY NUQTA DINAMIKASINING IKKI ASOSIY MASALASI

62- §. Dinamika qonunlari

1. Inersiya qonuni. Tashqi muhitdan ajratilgan moddiy nuqta tashqaridan kuch ta'sir etmaguncha o'zining tinch holatini yoki to'g'ri chiziqli va teng o'lchovli harakatini saqlashga intiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, bitta kuch ta'sirida bo'lgan moddiy nuqta (jism) bir xil vaqt orasida turli masofaga siljiydi va tezligi har xil bo'ladi. Demak, moddiy nuqtalar bitta kuch ta'sirida o'zlarining tezligini tez yoki sekin o'zgartiradi. Bu xususiyat *moddiy nuqtaning inertligi* deyiladi. Moddiy nuqtaning inertlik o'lchovi fizik miqdor bo'lib, u *massa* (m) deb ataladi.

To'g'ri chiziqli va teng o'lchovli harakat moddiy nuqtaning inersiyasi bo'yicha harakatidan iborat. Bu hodisani ta'riflovchi qonun dinamikaning birinchi qonuni deb yuritiladi.

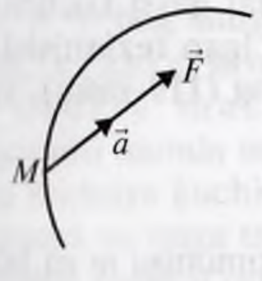
Dinamikaning birinchi qonuni qanoatlantiradigan sanoq sistemasi inersial sistema deyiladi. Inersiya qonuni bajarilmaydigan sanoq sistema inersial bo'lmagan sistema deb ataladi.

Markazi Quyosh bilan ustma-ust tushuvchi, o'qlari esa mos ravishda tanlab olingan yulduzlarga tomon yo'nalgan sanoq sistemasining inersial ekanligi tajribada aniqlangan. Ko'pincha, texnik masalalarni yechishda, Yer bilan mahkam bog'langan sistemaga *inersial sanoq sistemasi* deb qaraladi. Bu holda Yerning o'z o'qi atrofidagi aylanma harakati hamda Quyosh va yulduzlarga nisbatan harakati hisobga olinmaydi.

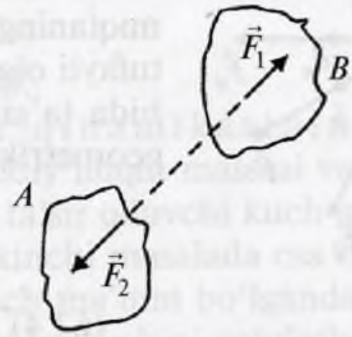
2. Dinamikaning asosiy qonuni. Moddiy nuqtaning harakatlantiruvchi kuch ta'siridan olgan tezlanishi shu kuch yo'nalishida bo'lib, miqdori mazkur kuch miqdoriga proporsionaldir (117-rasm). Bu qonunning matematik ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{62.1}$$

bu yerda: $\vec{F}$ — harakatlantiruvchi kuch, m — nuqtaning massasi, $\vec{a}$ — nuqta tezlanishi.



117-rasm.



118-rasm.

(62.1) vektor tenglama moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi deyiladi. (62.1) formuladan ko'ramizki, muayyan kuch ta'sirida moddiy nuqtaning oladigan tezlanishi faqat kuch kattaligigagina emas, balki nuqta massasiga ham bog'liq.

Agar moddiy nuqta faqat o'zining G og'irlik kuchi ta'sirida Yerga erkin tushsa, $F = G$, $a = g$ bo'lib, (62.1) ifoda

$$G = mg \tag{62.2}$$

ko'rinishni oladi. Demak, moddiy nuqtaning og'irlik kuchi bilan massasi o'zaro (62.2) tenglik bilan bog'langan ekan.

Agar moddiy nuqtaning og'irlik kuchi aniq bo'lsa, uning massasini (62.2) ga ko'ra

$$m = \frac{G}{g} \tag{62.3}$$

formuladan topish mumkin.

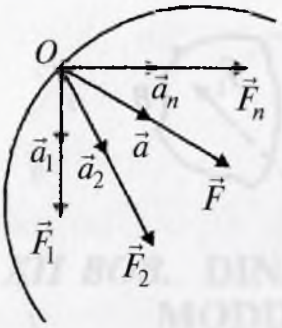
Xalqaro birliklar sistemasi (SI) da massa birligi qilib kilogarmm (1 kg), vaqt birligi qilib sekund (1 s), uzunlik birligi qilib metr (1 m) qabul qilingan.

Binobarin, kuch birligi quyidagicha bo'ladi:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}\,(\text{Nyuton}).$$

Demak, massasi 1 kg bo'lgan moddiy nuqtaga 1 m/s^2 tezlanish bera oladigan kuch Nyuton deb ataladi.

3. Ta'sir va aks ta'sir qonuni. Har bir ta'sir o'ziga teng va qarama-qarshi yo'nalishdagi aks ta'sirni vujudga keltiradi. Boshqacha aytganda, ikkita jismning bir-biriga ta'sirlari o'zaro teng va qarama-qarshi yo'nalgan (118-rasm). A jismning B jismga ko'rsatgan ta'siri $\vec{F}_1$ bo'lsa, uchinchi qonunga ko'ra, B ning A ga ko'rsatgan ta'siri $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ bo'ladi. Bu qonundan jismlar muvozanatda degan xulosa kelib chiqmaydi, chunki kuchlar har xil jismlarga qo'yilgan. Mazkur qonun ikkita jismning o'zaro ta'sirini xarakterlaydi.



119-rasm.

4. Kuchlarning erkinlik qonuni. Moddiy nuqtaning bir qancha kuch teng ta'sir etuvchisi tufayli olgan tezlanishi har qaysi kuchning alohida ta'siridan hosil bo'lgan tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng (119-rasm), ya'ni:

$$\vec{a} = \sum_{1}^{n} \vec{a}_\nu \,. \qquad (62.4)$$

(62.4) tenglikni ikki tomonini m ga ko'paytiramiz:

$$m\vec{a} = \sum m\vec{a}_\nu \,.$$

Demak,

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_\nu \,. \qquad (62.5)$$

(62.5) ifoda bir qancha kuch ta'siridagi moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasidir.

(62.5) ifodani (62.1) bilan taqqoslashdan ko'ramizki, moddiy nuqtaga bir necha kuch qo'yilgan bo'lsa, (62.1) dagi $\vec{F}$ ni shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi deb qarash kerak.

63- §. Erkin va erksiz moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi

Dinamika masalalarini asosiy ikkita turga ajratish mumkin. Bu masalalar erkin moddiy nuqta uchun quyidagicha:

Dinamikaning b i r i n c h i a s o s i y m a s a l a s i d a moddiy nuqta massasi va uning harakat qonuni berilgan bo'lib, harakatlantiruvchi kuchni topish so'raladi.

Dinamikaning i k k i n c h i a s o s i y m a s a l a s i esa moddiy nuqta massasi va unga ta'sir etuvchi kuch ma'lum bo'lganda, shu kuch ta'siridan hosil bo'ladigan kinematik elementlarni topishdan iborat.

Texnikada erksiz (bog'lanishdagi) moddiy nuqta harakatini tekshirishga doir ko'plab masalalarni yechishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda nuqtaga qo'yilgan bog'lanish uni qo'zg'almas sirt yoki chiziq ustida harakat qilishga majbur etadi.

Erksiz moddiy nuqta harakatiga doir masalalarni yechishda mazkur nuqta bog'lanishdan ozod etilib, qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchi bilan almashtiriladi.

Natijada moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

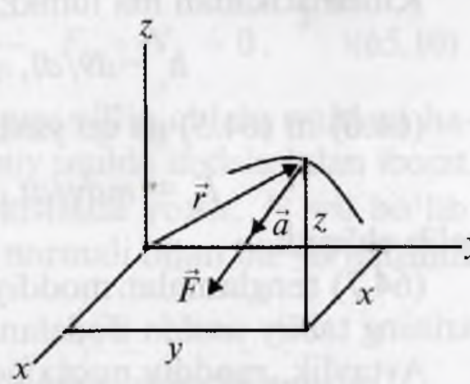
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}, \qquad (63.1)$$

bu yerda: $\vec{N}$ — bog'lanish reaksiya kuchi.

Demak, erksiz moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasida moddiy nuqta massasi va uning harakat qonuni hamda mazkur nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch ma'lum bo'lganda reaksiya kuchi aniqlanadi; ikkinchi masalada esa moddiy nuqta massasi va unga ta'sir etuvchi kuch ma'lum bo'lganda moddiy nuqtaning harakat qonuni bilan reaksiya kuchini aniqlash kerak.

64-§. Erkin va erksiz moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari

Erkin moddiy nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida harakatlanayotgan bo'lsin (120-rasm). Bu holda dinamikaning asosiy tenglamasi (62.1) ko'rinishda yozilar edi. (62.1) tenglamadagi $\vec{a}$ tezlanish vektorini $\vec{r}$ radius-vektori orqali ifodalaymiz:



120-rasm.

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (64.1)$$

(64.1) ni (62.1) ga qo'ysak:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (64.2)$$

kelib chiqadi.

(64.2) tenglama *erkin moddiy nuqta harakati differensial tenglamasining vektorini* ifodalaydi.

(64.2) ning Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \; F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \; F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (64.3)$$

bu ifodalarda F_x, F_y, F_z bilan $\vec{F}$ kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari belgilangan; x, y, z esa $\vec{r}$ radius-vektorning proyeksiyalari, ya'ni M nuqtaning koordinatalaridir.

(64.3) tenglamalar *egri chiziqli harakatdagi moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ko'rinishi* deyiladi.

Agar moddiy nuqtaning harakat yo'nalishi bilan kuch yo'nalishi bir to'g'ri chiziq bo'yicha bo'lsa, nuqta harakati to'g'ri chiziqli bo'ladi. Bu holda nuqtaning harakat yo'nalishi uchun Ox o'qni olsak, uning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (64.4)$$

Agar moddiy nuqta harakati Oxy tekislikda bo'lsa, (64.3) tenglamaning birinchi ikkitasi yoziladi.

(62.1) ning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi (121-rasm):

$$F_\tau = ma_\tau, \; F_n = ma_n, \; F_b = ma_b. \qquad (64.5)$$

Kinematikadan ma'lumki:

$$a_\tau = dv/dt, \;\; a_n = v^2/\rho, \; a_b = 0. \qquad (64.6)$$

(64.6) ni (64.5) ga qo'ysak,

$$F_\tau = mdv/dt, \;\; F_n = mv^2/\rho, \;\; F_b = 0 \qquad (64.7)$$

kelib chiqadi.

(64.7) tenglamalar moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining tabiiy usulda ifodalanishidir.

Aytaylik, moddiy nuqta qo'zg'almas silliq chiziq ustida harakatlanayotgan bo'lsin (122-rasm).

Sanoq sistemasi boshini O, M nuqtaning egri chiziqli koordinatasini $\breve{OM} = s$ deb qabul qilamiz. Qo'zg'almas silliq chiziqning nuqtaga ta'siri $\vec{N}$ reaksiya kuchi bilan almashtirilib, nuqtani bog'lanishdan ozod etamiz.

Natijada erksiz moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

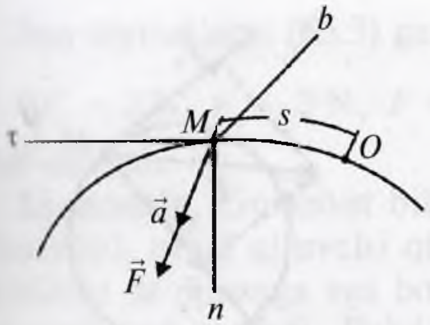
$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a} \quad \text{yoki} \quad \vec{F} + \vec{N} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (64.8)$$

Bu tenglamani Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, erksiz moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ifodasi kelib chiqadi:

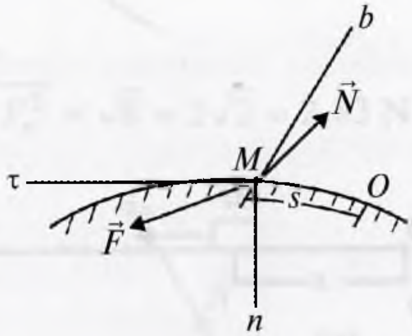
$$F_x + N_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \; F_y + N_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \; F_z + N_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (64.9)$$

(64.8) ni tabiiy koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$F_\tau + N_\tau = m\frac{dV}{dt}, \; F_n + N_n = m\frac{V^2}{\rho}, \; F_b + N_b = 0.$$



121-rasm.



122-rasm.

Qo'zg'almas chiziq silliq bo'lganligi uchun $\vec{N}$ ning urinmadagi proyeksiyasi nolga teng: $N_\tau = 0$.

Demak,

$$F_\tau = m\frac{dV}{dt}, \; F_n + N_n = m\frac{V^2}{\rho}, \; F_b + N_b = 0. \qquad (65.10)$$

(64.10) moddiy nuqtaning qo'zg'almas silliq chiziq ustidagi harakati uning differensial tenglamasini tabiiy usulda ifodalashdan iborat.

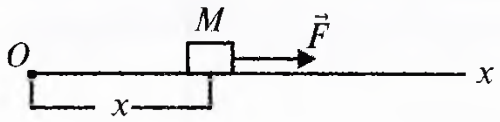
Xususiy holda $\vec{F}$ kuch urinma tekislikda yotsa, F_b =0 bo'lib, normal reaksiya trayektoriyaning bosh normali bilan bir yo'nalishda bo'ladi.

65- §. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasini yechish

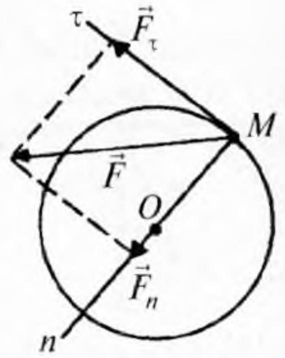
Moddiy nuqtaning harakat qonuni ma'lum bo'lsa, dinamikaning birinchi masalasini oson hal qilish mumkin. Bu masala quyidagi tartibda yechiladi:

1. Agar masala shartida sanoq sistemasi berilmagan bo'lsa, u tanlab olinadi.
2. Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.
3. Agar nuqta bog'lanishda bo'lsa, u bog'lanishdan qutqariladi va bog'lanish reaksiya kuchlari rasmda ko'rsatiladi.
4. Tanlab olingan sanoq sistemasida moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari tuziladi.
5. Berilgan harakat qonunidan foydalanib moddiy nuqta tezlanishining tanlab olingan sistemadagi proyeksiyalari aniqlanadi.
6. Tezlanishning topilgan proyeksiyalari differensial tenglamalarga qo'yilib noma'lum kuch aniqlanadi.

31-masala. Massasi m = 2 kg bo'lgan M jism x = 10sin2t (m) qonunga ko'ra $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. F kuch modulining eng katta qiymati aniqlansin (123-rasm).



123-rasm.



124-rasm.

Yechish. Masala shartiga ko'ra M jism to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Jismni moddiy nuqta deb qarab, sanoq sistemasi uchun Ox o'qni olamiz (123-rasm). M jismga faqat $\vec{F}$ kuch ta'sir qiladi.

M jism harakatining differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \qquad (65.1)$$

Jismning harakat qonunidan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{dx}{dt} = 20\cos 2t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -40\sin 2t. \qquad (65.2)$$

(65.2) ni (65.1) ga qo'ysak:

$$F_x = -40m\sin 2t\,,$$

bu yerda F_x kuch miqdori $\sin 2t = -1$ bo'lganda eng katta qiymatga erishadi.

Demak, $F_x = 80$ N bo'ladi.

32-masala. Massasi $m = 1$ kg bo'lgan moddiy nuqta radiusi $r = 2$ m bo'lgan aylana bo'ylab $V = 2t$ (m/s) tezlik bilan harakat qiladi. $t = 1$ sekund bo'lganda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning teng ta'sir etuvchisi topilsin (124-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 124-rasmdagidek tanlaymiz. Moddiy nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgani uchun harakat differensial tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$F_\tau = m\frac{dV}{dt}, \quad F_n = m\frac{V^2}{\rho}. \qquad (65.3)$$

Moddiy nuqta tezligining o'zgarishi qonunidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

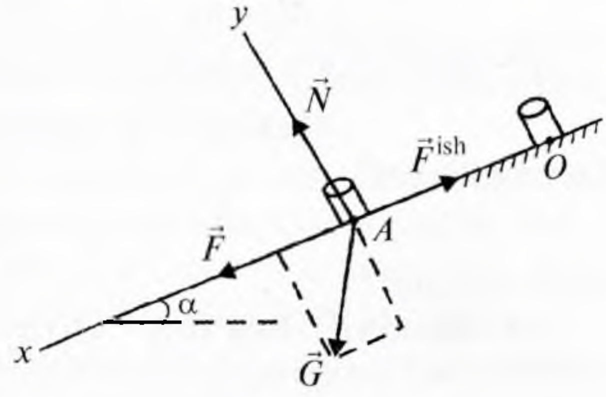
$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Son qiymatlarni (65.3) ga qo‘ysak,

$$F_\tau = 2\text{ N},\ F_n = 2\text{ N},\ F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}83\text{ N}$$

kelib chiqadi.

33-masala. Gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi qiya tekislikda M massaga ega bo‘lgan suvli bak turibdi. Bakdagi suv sirti qiya tekislikka parallel bo‘lishi uchun bakni qiya tekislikka parallel bo‘lgan qanday $\vec{F}$ kuch bilan harakatga keltirish kerak? Bakning tagi bilan qiya tekislik o‘rtasidagi ishqalanish koeffitsiyenti f ga teng (125-rasm).



125-rasm.

Yechish. Bak harakatining yo‘nalishi qiya tekislik bo‘ylab sodir bo‘lgani sababli, Ox o‘qni 125-rasmdagidek tanlaymiz. Qo‘yilgan masalani hal etish uchun avval suyuqlik zarrachasi harakatini tekshiramiz.

Zarrachaga ta’sir qiluvchi kuch og‘irlik kuchi $\vec{g}\Delta m$ va suyuqlik sirtiga perpendikular bo‘lgan $\Delta\vec{R}$ bosim kuchidan iborat. Suyuqlik sirti qiya tekislikka parallel. Suyuqlik zarrachasi uchun dinamikaning asosiy tenglamasi

$$a_s \Delta m = g \sin\alpha \cdot \Delta m$$

bo‘ladi. Bu yerda suyuqlik zarrachasining massasi Δm, tezlanishi esa a_s. Suvli bak tezlanishi a_x ham a_s tezlanishga ega bo‘lishi kerak. Demak:

$$a_x = a_s = g\sin\alpha . \qquad (65.4)$$

Endi suvli bakni A moddiy nuqta deb qaraymiz. Bakka og‘irlik kuchi $\vec{G}$, tortish kuchi $\vec{F}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}^{\text{ish}}$ hamda qiya tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$ ta’sir qiladi. Bak harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘lgani uchun dinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ma_x = \sum F_{vx} , \qquad (65.5)$$

bu yerda: M — suvli bak massasi, a_x — uning tezlanishi.

125-rasmdan:

$$\sum F_{vx} = F - F^{\text{ish}} + G\sin\alpha ,\ \text{bu yerda}\ F^{\text{ish}} = fN.$$

N ni topish uchun moddiy nuqta harakati differensial tenglamasining Oy o‘qidagi proyeksiyasini tuzamiz:

$$Ma_y = N - G\cos\alpha ,$$

$a_y = 0$ bo‘lgani uchun $N - G\cos\alpha = 0$; $N = G\cos\alpha$. Shunday qilib,

$F^{ish} = fG\cos\alpha$ va

$$\sum F_{vx} = F - fG\cos\alpha + G\sin\alpha\,, \qquad (65.6)$$

(65.4) va (65.6) ni (65.5) ga qo'yamiz:

$$Mg\sin\alpha = F - fG\cos\alpha + G\sin\alpha\,. \qquad (65.7)$$

$G=Mg$ bo'lgani uchun (65.7) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Mg\sin\alpha = F - fMg\cos\alpha + Mg\sin\alpha\,,$$

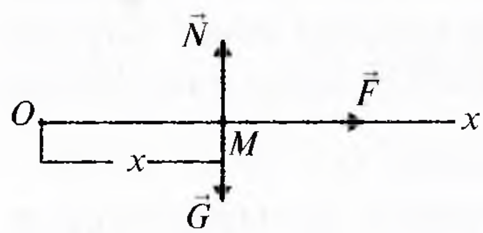
bu tenglikdan

$$F = fMg\cos\alpha$$

kelib chiqadi.

34-masala. Bug'doy o'ruvchi kombaynning pichog'i $x=0{,}05\cos 10\pi t$ qonunga ko'ra to'g'ri chiziqli harakat qiladi (t – sekund, x – metr hisobida). Pichoqni harakatga keltiruvch $\vec{F}$ kuch aniqlansin. Pichoq og'irligi $G=100$ N. Erkin tushish tezlanishi $g = 10$ m/s^2 deb qabul qilinsin.

Yechish. Masala shartiga ko'ra pichoq to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Pichoqni moddiy nuqta deb qarab, sanoq sistemasi uchun Ox o'qni olamiz (126-rasm).



126-rasm.

Pichoqning boshlang'ich holati O nuqtada bo'lsin. Pichoqqa og'irlik kuchi $\vec{G}$, harakatga keltiruvchi kuch $\vec{F}$ hamda reaksiya kuchi $\vec{N}$ ta'sir qiladi.

Pichoq harakatining differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\,. \qquad (65.8)$$

Pichoqning harakat qonunidan vaqt bo'yicha hosila hisoblaymiz:

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}05\cdot 10\pi\sin 10\pi t = -0{,}5\pi\sin 10\pi t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2\cos 10\pi t. \qquad (65.9)$$

(65.9) ni (65.8) ga qo'ysak,

$$-m\cdot 5\pi^2\cos 10\pi t = F \qquad (65.10)$$

kelib chiqadi. $m=G/g$ bo'lgani sababli (65.10) quyidagicha yoziladi:

$$F = -5\frac{G}{g}\pi^2\cos 10\pi t\,.$$

Masala shartidagi berilganlarni e'tiborga olsak,

$$F = -50\pi^2\cos 10\pi t \ \ (\mathrm{N})$$

kelib chiqadi.

66- §. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini yechish

Texnikaga oid ko'pgina masalalarni yechish orqali dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi hal qilinadi.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini yechishda nuqtaga qo'yilgan kuch qanday xarakterda o'zgarishiga qarab differensial tenglamalarni yechishning turli usullari qo'llaniladi.

Eng sodda hol kuch o'zgarmas bo'lgan holdir. Ba'zi hollarda kuch vaqtning, yoki nuqta holatining, yoki nuqta tezligining funksiyasi bo'lishi mumkin. Shuningdek, kuch bir yo'la vaqt, yo'l, tezlik va hatto tezlanish funksiyasidan iborat hollar ham uchraydi.

Dinamikaning bu asosiy masalasini yechish uchun (64.2), (64.3), (64.7)–(64.10) ko'rinishdagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalardan birini tuzish va uni integrallash kerak. Integrallash natijasida ixtiyoriy o'zgarmaslar hosil bo'ladi.

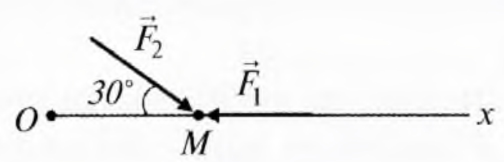
Har aniq bir masalani yechishda ixtiyoriy o'zgarmaslarni aniqlash kerak. Bu o'zgarmaslarni aniqlashda moddiy nuqtaning boshlang'ich paytdagi holati va tezligini ifodalovchi boshlang'ich shartlardan foydalaniladi.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi differensial tenglamalarni yechib, ya'ni funksiyani differensiallashga teskari bo'lgan yo'lni qo'llab hal qilingani uchun u dinamikaning teskari masalasi deb ham ataladi.

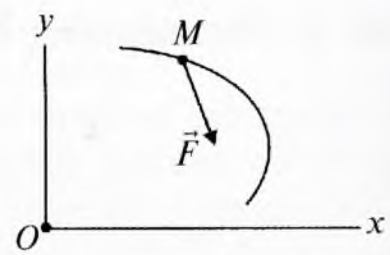
Dinamikaning teskari masalasi quyidagi tartibda yechiladi.

1. Agar masala shartida sanoq sistemasi berilmagan bo'lsa, u tanlab olinadi.
2. Rasmda moddiy nuqtaning ixtiyoriy holati belgilanib, unga ta'sir qiluvchi kuchlar tasvirlanadi.
3. Agar nuqta bog'lanishda bo'lsa, uni bog'lanishdan qutqarib, bog'lanish reaksiya kuchlari rasmda ko'rsatiladi.
4. Moddiy nuqta harakatining boshlang'ich shartlari yozib olinadi.
5. Moddiy nuqta harakatining tanlab olingan sanoq sistemasidagi differensial tenglamalari tuziladi.
6. Tuzilgan differensial tenglamalar integrallanadi.
7. Boshlang'ich shartlardan foydalanib integrallash natijasida hosil bo'lgan o'zgarmaslar aniqlanadi.
8. Aniqlangan moddiy nuqtaning harakat tenglamasidan kerak bo'lgan noma'lumlar topiladi.

35-masala. m = 5 kg bo'lgan moddiy nuqtaga F_1=3 N, F_2=10 N kuchlar ta'sir qiladi. Moddiy nuqta tezlanishining Ox o'qdagi proyeksiyasi aniqlansin (127-rasm).



127-rasm.



128-rasm.

Yechish. Masala shartiga ko'ra sanoq sistemasi berilgan bo'lib, ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda ko'rsatilgan. Moddiy nuqta harakati differensial tenglamasining *Ox* o'qidagi proyeksiyasini yozib olamiz:

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \quad (66.1)$$

127-rasmdan: $F_x = -F_1 + F_2\cos 30°$. (66.2)

(66.2) ni (66.1) ga qo'yamiz:

$$ma_x = -F_1 + F_2\cos 30°,$$

bu yerdan:

$$a_x = \frac{-F_1 + F_2\cos 30°}{m}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak, $a_x = 1{,}13$ m/s^2 kelib chiqadi.

36-masala. Massasi $m = 2$ kg bo'lgan nuqta *Oxy* tekisligida $F_x = 2\sin 0{,}5\pi t$, $F_y = 5\cos\pi t$ kuchlar ta'sirida harakat qiladi. Mazkur nuqtaning t=1 sekunddagi tezligi topilsin (128-rasm). Boshlang'ich paytda nuqta tinch bo'lgan.

Yechish. Masala shartiga ko'ra moddiy nuqta *Oxy* tekisligida harakat qiladi. Shuning uchun sanoq sistemasi 128-rasmdagidek bo'ladi. Mazkur nuqtaga F_x, F_y kuchlar ta'sir qiladi.

Boshlang'ich vaqtda nuqta tinch turgani uchun x=0, y=0, V_x=0, V_y=0 bo'ladi.

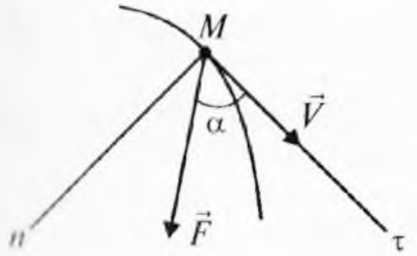
Moddiy nuqtaning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\sin 0{,}5\pi t, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 5\cos\pi t,$$

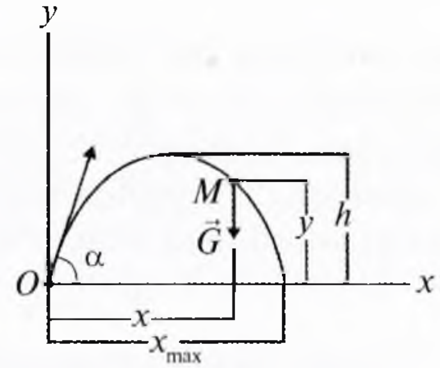
bu yerdan: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\sin 0{,}5\pi t}{m}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{5\cos\pi t}{m}$ yoki

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{2\sin 0{,}5\pi t}{m}, \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5\cos\pi t}{m} \quad (66.3)$$

kelib chiqadi.



129-rasm.



130-rasm.

(66.3) ni boshlang'ich shartlardan foydalanib integrallasak:

$$V_x = \frac{-2\cos 0{,}5\pi t}{0{,}5\pi m}, \quad V_y = \frac{5\sin \pi t}{\pi m}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak, $V_x = -0{,}64$ m/s, $V_y = 0$ kelib chiqadi.

37-masala. Massasi $m = 16$ kg bo'lgan moddiy nuqta tekislikdagi egri chiziqli trayektoriya bo'ylab teng ta'sir etuvchisi $F = 0{,}3t$ (N) bo'lgan kuch ta'sirida harakatlanadi. Mazkur kuch tezlik vektori bilan $\alpha = 50°$ burchakni tashkil qiladi. $t = 20$ sekund bo'lganda egrilik radiusi $\rho = 12$ m. Moddiy nuqtaning tezligi aniqlansin (129-rasm).

Yechish. Moddiy nuqta harakatini tabiiy koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiramiz.

Nuqtaga rasmda ko'rsatilgan $\vec{F}$ kuch ta'sir etadi.

Moddiy nuqta tezligini aniqlash uchun (64.7) tenglamaning ikkinchisini tuzamiz:

$$m\frac{V^2}{\rho} = F_n. \tag{66.4}$$

129-rasmdan: $$F_n = F\sin 50°. \tag{66.5}$$

(66.5) ni (66.4) ga qo'yamiz:

$$m\frac{V^2}{\rho} = F\sin 50°,$$

bundan $$V^2 = \frac{\rho \cdot F\sin 50°}{m}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak, $V = 1{,}86$ m/s kelib chiqadi.

38-masala. Don otuvchi apparatdan otilgan bug'doyning boshlang'ich tezligi V_0. V_0 tezlikning gorizont bilan hosil qilgan α burchagi qanday bo'lganda bug'doy eng uzoqqa borib tushadi? Muhit qarshiligi hisobga olinmasin (130-rasm).

Yechish. Bug'doy harakatini Dekart koordinatalari sistemasiga nisbatan tekshiramiz. Koordinatalar boshi O ni M (bug'doy) nuqtaning boshlang‘ich otilish holatida olib, Oxy tekislikni $\vec{V}_0$ orqali o‘tkazamiz. Bu holda bug‘doyning harakati Oxy tekisligida bo‘ladi. Bug‘doyga faqat og‘irlik kuchi ta’sir qiladi.

Boshlang‘ich paytda bug‘doyning koordinatalari x=0, y=0; tezligining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari esa

$$V_x = V_0 \cos\alpha, \; V_y = V_0 \sin\alpha .$$

M nuqta harakatining differensial tenglamalari:

$$m\ddot{x} = 0, \; m\ddot{y} = -G \text{ yoki } \ddot{x} = 0, \; \ddot{y} = -g . \qquad (66.6)$$

(66.6) ni ikki marta integrallasak

$$\dot{x} = C_1, \; x = C_1 t + C_2,$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, \; y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \qquad (66.7)$$

hosil bo‘ladi.

Boshlang‘ich shartlarni (66.7) ga qo‘ysak,

$$C_1 = V_0 \cos\alpha, \; C_2 = 0, \; C_3 = V_0 \sin\alpha, \; C_4 = 0$$

kelib chiqadi.

Demak, bug‘doy harakatining parametrik tenglamalari

$$x = t \cdot V_0 \cos\alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + t \cdot V_0 \sin\alpha \qquad (66.8)$$

bo‘ladi.

(66.8) tenglamalardan vaqtni yo‘qotsak, bug‘doy harakatining trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi, ya’ni:

$$y = x\text{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} . \qquad (66.9)$$

(66.9) parabola tenglamasi bo‘lib, uning o‘qi Oy o‘qiga paralleldir.

Endi bug‘doyning eng uzoqqa borib tushish masofasini topamiz. Buning uchun (66.9) ni nolga tenglashtirib,

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (66.10)$$

ni hosil qilamiz.

(66.10) dagi x koordinata maksimum bo‘lishi uchun $\sin 2\alpha = 1$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bo‘lishi kerak.

Demak, $x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$.

? Nazorat savollari

1. I. Nyutonning birinchi qonuni qanday ta'riflanadi?
2. I. Nyutonning ikkinchi qonuni qanday ta'riflanadi?
3. I. Nyutonning uchinchi qonuni qanday ta'riflanadi?
4. Kuchning mexanik kattaligi SI (Xalqaro birliklar sistemasi)da qanday birlikda o'lchanadi?
5. Nuqta dinamikasining birinchi masalasini izohlang.
6. Nuqta dinamikasining ikkinchi masalasi qanday ta'riflanadi?
7. SI (Xalqaro birliklar sistemasi) da tezlanish kattaligi qanday birlikda o'lchanadi?
8. SI (Xalqaro birliklar sistemasi) da massa (m) kattaligi qanday birlikda o'lchanadi?
9. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasi necha xil usulda beriladi?
10. Erkin moddiy nuqta harakatining vektor usuldagi differensial tenglamasi qanday yoziladi?
11. Erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari qanday yoziladi?
12. Erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari qanday yoziladi?
13. Dinamikada kuch kattaligi qaysi kattaliklarning funksiyasi sifatida keladi?
14. Erkin moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi vektor usulida qanday yoziladi?
15. Bog'lanishdagi moddiy nuqta uchun dinamika asosiy tenglamasi qanday yoziladi?
16. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari qanday yoziladi?
17. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakati differensial tenglamalari tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday yoziladi?

XIII BOB. MODDIY NUQTANING TEBRANMA HARAKATI

Qishloq xo'jaligi mashinalarining keng miqyosda ishlatilishi, shuningdek turli transport hamda suv inshootlarining barpo bo'lishi ularning qismlarida hosil bo'ladigan tebranishlarni chuqur o'rganishni talab qiladi.

Mashina va inshoot qismlarining tebranma harakatlari ko'p hollarda moddiy nuqta tebranma harakatini o'rganishga keltiriladi.

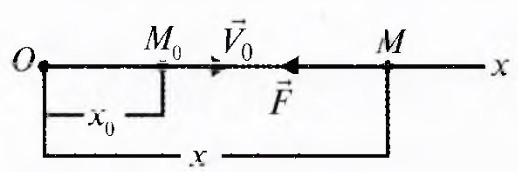
Moddiy nuqtaning tebranma harakati deb shunday harakatga aytiladiki, bunda nuqta muvozanat holatidan goh bir tomonga, goh ikkinchi tomonga navbatma-navbat chetlanadi. Demak, tebranma harakat takrorlanuvchi harakatdir.

Tebranma harakatlar asosan uch turga bo'linadi.

1. Erkin (garmonik) tebranma harakat.
2. So'nuvchi tebranma harakat.
3. Majburiy tebranma harakat.

67- §. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Faraz qilaylik, moddiy nuqtaga hammavaqt uning muvozanat holati tomon yo'nalgan kuch ta'sir qilsin va mazkur nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin (131-rasm).



131-rasm.

Moddiy nuqta koordinatasining funksiyasi sifatida o'zgaruvchi va muvozanat holatiga qarab yo'nalgan kuch *qaytaruvchi kuch* deb ataladi. Qaytaruvchi kuch nuqtaning holatiga bog'liq bo'ladi, ya'ni:

$$F = -cx, \tag{67.1}$$

bu yerda: c — moddiy nuqtani uzunlik birligiga ko'chirish uchun zarur bo'lgan kuch bo'lib, bikirlik koeffitsiyenti deyiladi, uning o'lchov birligi N/m; x — nuqtaning absissasi.

Boshlang'ich paytda M nuqtaning absissasi x, tezligi V_0 bo'lsin. M nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx\,, \tag{67.2}$$

bu ifodada

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{67.3}$$

belgilash kiritsak, u quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0\,. \tag{67.4}$$

(67.4) ning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt\,. \tag{67.5}$$

(67.5) dagi C_1 va C_2 lar o'zgarmaslar boshlang'ich shartlardan foydalanib aniqlanadi:

$$C_1 = \frac{V_0}{k},\ C_2 = x_0\,. \tag{67.6}$$

Shunday qilib, M nuqtaning harakati

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt \qquad (67.7)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Moddiy nuqta tebranma harakatini umumiy holda tekshirish qulay bo'lishi uchun C_1, C_2 o'rniga a va α o'zgarmaslarni quyidagicha tanlaymiz:

$$C_1 = a\cos\alpha,\ C_2 = a\sin\alpha . \qquad (67.8)$$

(67.8) ni (67.5) ga qo'yib, M nuqta harakatini aniqlovchi tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x = a\sin(kt + \alpha). \qquad (67.9)$$

(67.8) ifodalarni avval kvadratga ko'tarib qo'shamiz, so'ng (67.8) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo'lamiz va (67.6) ni e'tiborga olsak,

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0 k}{V_0} \qquad (67.10)$$

kelib chiqadi.

(67.9) dan ko'ramizki, moddiy nuqtaning qaytaruvchi kuch ta'siridagi harakati davriy xarakterga ega bo'lgan erkin tebranma harakatdan iborat ekan. Shuning uchun (67.4) formula erkin tebranma harakatning differensial tenglamasi deyiladi. (67.9) tenglama moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat qonunini ifodalaydi.

(67.9) tenglamadagi a – nuqtaning muvozanat holatidan eng katta og'ishi – tebranish amplitudasi, $kt + \alpha$ – tebranish fazasi, α – boshlang'ich faza, k – tebranishning doiraviy takrorligi deyiladi.

Erkin tebranma harakat grafigi 132-rasmda ko'rsatilgan. τ davr oralig'ida tebranish fazasi 2π ga o'zgarishini hisobga olsak, (67.9) dan quyidagi tenglamani yozish mumkin:

$$k(t + \tau) + \alpha = kt + (\alpha + 2\pi).$$

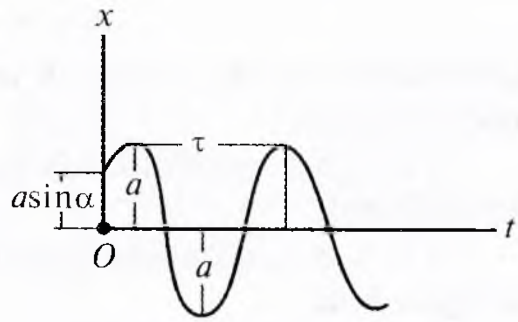
Bundan erkin tebranma harakat davrini aniqlovchi

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \qquad (67.11)$$

formulani hosil qilamiz.

Tebranish davrining teskari qiymati tebranish takrorligi deyiladi; uni ν bilan belgilasak, ta'rifga ko'ra:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi}.$$



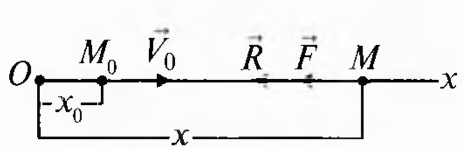
132-rasm.

(67.10), (67.11) dan ko'ramizki, tebranish amplitudasi va boshlang'ich faza harakatning boshlang'ich shartlariga bog'liq, tebranish davri, shuningdek, tebranish takrorligi nuqtaning boshlang'ich holatiga bog'liq emas ekan. Binobarin, tebranish davri tebranma harakatdagi nuqtaning o'zgarmaydigan xarakteristikasidir. Tebranish davrini topish uchun tebranma harakatning differensial tenglamasini (67.4) ko'rinishda tuzish va k ni topish kifoya.

68- §. Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati

Massasi m bo'lgan M moddiy nuqta qaytaruvchi kuch va muhitning qarshilik kuchi ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin (133-rasm). Muhitning qarshilik kuchini moddiy nuqta tezligining birinchi darajasiga proporsional deylik:

$$R = -\mu\dot{x}. \tag{68.1}$$



133-rasm.

Bu harakatni tekshirish uchun moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}. \tag{68.2}$$

(68.2) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0. \tag{68.3}$$

(68.3) ning ikki tomonini m ga bo'lib, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\mu}{m} = 2b$ deb belgilaymiz. Natijada

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \tag{68.4}$$

kelib chiqadi.

Boshlang'ich paytda M nuqta M_0 da bo'lib, uning absissasi x_0, tezligi V_0 bo'lsin. (68.4) ning yechimini topish uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0.$$

Bu tenglama yechimi

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$$

ko'rinishda bo'lib, undagi b va k ga nisbatan quyidagi hollar uchrashi mumkin:

1) $k > b$ – qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan kichik bo'lgan hol;

2) $k < b$ – qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan katta bo'lgan hol;

3) $k = b$ – chegara hol.

Bu hollarni alohida-alohida tekshiramiz.

1) $k > b$ bo'lganda xarakteristik tenglama ildizlari kompleks sondan iborat, ya'ni:

$$n_{1,2} = -b \pm i\sqrt{k^2 - b^2} \quad \text{yoki} \quad n_{1,2} = -b \pm k_1 i,$$

bunda $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$.

Bu holda (68.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t). \qquad (68.5)$$

(68.5) dagi C_1, C_2 o'zgarmaslarni (67.8) ko'rinishda tanlab olsak, (68.5) quyidagicha yoziladi:

$$x = ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha). \qquad (68.6)$$

(68.6) dagi ae^{-bt} ifoda vaqt o'tishi bilan nolga intiladi, ya'ni harakat asta-sekin so'na boradi. Shuning uchun muhitning qarshilik kuchi va qaytaruvchi kuch ta'siridagi nuqtaning harakati kichik qarshiliklar holida so'nuvchi tebranma harakat bo'ladi.

(68.4) formula so'nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasini (68.5) yoki (68.6) formula esa so'nuvchi tebranma harakat qonunini ifodalaydi.

So'nuvchi tebranish grafigi (68.6) tenglamaga asosan, tenglamalari $x = \pm ae^{-bt}$ bo'lgan ikki egri chiziq orasida bo'lib, bu egri chiziqlarga urinib o'tadi (134-rasm).

(68.6) dagi a va α o'zgarmaslarni harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanib topamiz.

(68.6) dan hosila olamiz:

$$\dot{x} = -bae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha) + k_1 ae^{-bt}\cos(k_1 t + \alpha). \qquad (68.7)$$

(68.6) va (68.7) ga boshlang'ich shartlarni qo'ysak:

$$x_0 = a\sin\alpha, \; V_0 = -ab\sin\alpha + ak_1\cos\alpha$$

yoki

$$x_0 = a\sin\alpha, \; V_0 + bx_0 = ak_1\cos\alpha \qquad (68.8)$$

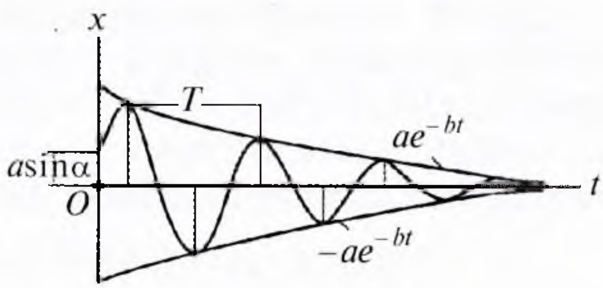
kelib chiqadi.

(68.8) tenglamalar sistemasini yechsak:

$$a = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (V_0 + bx_0)^2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{k_1 x_0}{V_0 + bx_0} \qquad (68.9)$$

hosil bo'ladi.



134-rasm.

(68.6) tenglamada $\sin(k_1 t + \alpha)$ qatnashgani tufayli nuqta harakati davriy xarakterga ega, lekin e^{-bt} nuqtaning to'liq avvalgi holatiga qayta olmasligini ko'rsatadi. Shuning uchun so'nuvchi tebranishning tebranish davri tushunchasini shartli kiritamiz:

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \tag{68.10}$$

yoki

$$T = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-(b/k)^2}}. \tag{68.11}$$

(68.11) dagi $\left(\sqrt{1-(b/k)^2}\right)^{-1}$ ifodani qatorga yoyib, b/k ning ikkinchi darajadan yuqori bo'lgan darajadagi hadlarini tashlab yuborsak va (67.11) ni e'tiborga olsak:

$$T = \tau\left\{1 + \frac{1}{2}(b/k)^2\right\} \tag{68.12}$$

kelib chiqadi. Bu ifodadagi *b/k qarshilik koeffitsiyenti* deb ataladi.

(68.12) dan ko'ramizki, $T > \tau$, biroq qarshilik juda kichik bo'lganda tebranma harakat davri erkin tebranish davridan deyarli farq qilmaydi, ya'ni $T \approx \tau$.

Endi, so'nuvchi tebranma harakat amplitudasining o'zgarishini ko'rib chiqamiz. M nuqta o'zining muvozanat holatidan ν-maksimal og'ishini x_ν bilan, $\nu + 1$-maksimal og'ishini esa $x_{\nu+1}$ bilan belgilaymiz. Bu og'ishlarga mos kelgan vaqtlar t_ν va $t_{\nu+1}=t_\nu+T$ uchun (68.6) quyidagicha bo'ladi:

$$x_\nu = ae^{-bt_\nu}\sin(k_1 t_\nu + \alpha),$$

$$x_{\nu+1} = ae^{-b(t_\nu+T)} \cdot \sin(k_1 t_\nu + 2\pi + \alpha) = ae^{-b(t_\nu+T)}\sin(k_1 t_\nu + \alpha),$$

bundan

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = e^{-bT} \tag{68.13}$$

kelib chiqadi. (68.13) dan ko'ramizki, $x_{\nu+1}/x_\nu$ nisbat o'zgarmas hamda noldan kichik.

Demak, tebranish amplitudasining har bir T davr o'tishdagi ketma-ket qiymatlari, mahraji e^{-bt} bo'lgan kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil qiladi. $D=e^{-bt}$ — *tebranish dekrementi* (so'nish faktori) deyiladi. Tebranish dekrementidan olingan natural logarifmning moduli esa logarifmik dekrement deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\ln D = bT, \tag{68.14}$$

bu yerda: b — so'nish koeffitsiyenti.

2) $k < b$ bo'lgan holda xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va manfiy bo'ladi, ya'ni:

$$n_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2}, \; n_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}\,.$$

Natijada (68.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{t\sqrt{b^2-k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right). \qquad (68.15)$$

(68.15) dan ko'ramizki, $k < b$ hol uchun nuqta harakati davriy xarakterga ega emas. Shuning uchun bu holdagi harakat aperiodik (ya'ni, davriy bo'lmagan) so'nuvchi harakat deyiladi.

(68.15) dagi C_1, C_2 o'zgarmaslar harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

(68.15) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = C_1(\sqrt{b^2-k^2} - b)e^{(\sqrt{b^2-k^2}-b)t} - C_2(\sqrt{b^2-k^2} + b)e^{-(\sqrt{b^2-k^2}+b)t}. \qquad (68.16)$$

(68.15) va (68.16) ga boshlang'ich shartlarni qo'ysak:

$$x_0 = C_1 + C_2, \; V_0 = C_1(\sqrt{b^2-k^2} - b) - C_2(\sqrt{b^2-k^2} + b) \qquad (68.17)$$

hosil bo'ladi. (68.17) dan:

$$C_1 = \frac{V_0 + x_0(b + \sqrt{b^2-k^2})}{2\sqrt{b^2-k^2}}, \; C_2 = \frac{V_0 + x_0(b - \sqrt{b^2-k^2})}{2\sqrt{b^2-k^2}} \qquad (68.18)$$

kelib chiqadi.

(68.18) ni (68.15) ga qo'ysak, M nuqtaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi aperiodik harakat tenglamasi hosil bo'ladi:

$$x = \frac{e^{-bt}}{2\sqrt{b^2-k^2}} \times$$

$$\times\left\{\left[V_0 + \left(b + \sqrt{b^2-k^2}\right)\cdot x_0\right]\cdot e^{t\sqrt{b^2-k^2}} - \left[V_0 + \left(b - \sqrt{b^2-k^2}\right)\cdot x_0\right]\cdot e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right\} \qquad (68.19)$$

3) $b = k$ da (68.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t). \qquad (68.20)$$

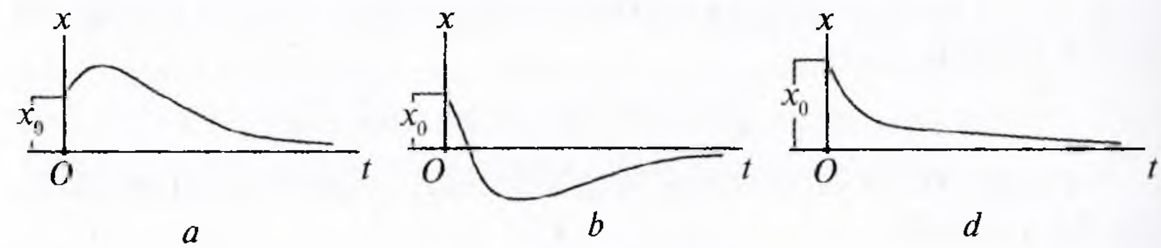
Demak, bu holda ham harakat aperiodik bo'ladi.

(68.20) dan hosila olamiz:

$$\dot{x} = -C_1 b e^{-bt} + C_2 e^{-bt}(-bt + 1). \qquad (68.21)$$

(68.20) va (68.21) ga boshlang'ich shartlarni qo'ysak:

$$x_0 = C_1, \; V_0 = -C_1 b + C_2$$



135-rasm.

hosil bo'ladi. Bu tengliklardan

$$C_1 = x_0, \ C_2 = V_0 + bx_0$$

kelib chiqadi.

Demak, $k = b$ bo'lgan holdagi aperiodik harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + (V_0 + bx_0)\cdot t\right]. \qquad (68.22)$$

Keyingi ikki holda moddiy nuqta tebranma harakat qilmay asimtotik ravishda nolga yaqinlashadi.

Bunday harakatning grafigi moddiy nuqtaning boshlang'ich holatiga hamda boshlang'ich tezlikning moduli va yo'nalishiga bog'liq. 135-rasmda turli boshlang'ich shartlar uchun b > k holdagi aperiodik harakat grafigi ko'rsatilgan:

a) $x_0 > 0$, $V_0 > 0$; (135-rasm, *a*);

b) $x_0 > 0$, $V_0 > 0$ lekin, $|V_0| > x_0\cdot(b + \sqrt{b^2 - k^2})$, $(|V_0| < bx_0)$ (135-rasm, *b*);

d) $x_0 > 0$, $V_0 \le 0$, lekin $|V_0| < x_0\cdot(b + \sqrt{b^2 - k^2})$, $(|V_0| < bx_0)$ (135-rasm, *d*).

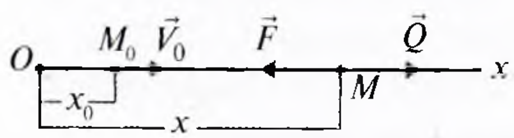
$b = k$ holda ham aperiodik so'nuvchi harakat grafigi 135-rasmda ko'rsatilganiga o'xshash bo'ladi.

69- §. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Moddiy nuqta qaytaruvchi kuch hamda vaqtning uzluksiz funksiyasi sifatida o'zgaruvchi va uyg'otuvchi kuch deb ataluvchi kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin (136-rasm).

Uyg'otuvchi kuch garmonik qonun bo'yicha o'zgarsin, ya'ni:

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta). \qquad (69.1)$$



136-rasm.

(69.1) da Q uyg'otuvchi kuchning eng katta qiymati, p — doiraviy takrorligi, $pt+\delta$ — fazasi, δ — boshlang'ich fazasi. Uyg'otuvchi kuch davri esa $\frac{2\pi}{p}$ ga teng.

Boshlang'ich paytda M nuqta M_0 da bo'lib, uning koordinatasi x_0, tezligi V_0 bo'lsin.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta). \qquad (69.2)$$

(69.2) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$m\ddot{x} + cx = Q_0 \sin(pt + \delta).$$

$k^2 = \dfrac{c}{x}$, $P_0 = \dfrac{Q}{m}$ belgilashlar kiritsak:

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin(pt + \delta) \qquad (69.3)$$

hosil bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, (69.3) differensial tenglama yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = x_1 + x_2. \qquad (69.4)$$

(69.4) da x_1 bilan bir jinsli

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (69.5)$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi belgilangan; x_2 esa (69.3) ning xususiy yechimidan iborat.

(69.5) differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$x_1 = a\sin(kt + \alpha) \qquad (69.6)$$

ko'rinishda ifodalanishi bizga ma'lum.

(69.3) o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$x_2 = B\sin(pt + \delta). \qquad (69.7)$$

(69.7) dagi B koeffitsiyentni aniqlash uchun (69.7) dan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\ddot{x}_2 = -Bp^2 \sin(pt + \delta). \qquad (69.8)$$

(69.7) va (69.8) ni (69.3) ga qo'yamiz:

$$-Bp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 B\sin(pt + \delta) = P_0 \sin(pt + \delta).$$

Bu ayniyatdan: $B = \dfrac{P_0}{k^2 - p^2}$, $k \neq p$.

Natijada (69.7) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta). \qquad (69.9)$$

(69.9) tenglama bilan aniqlanuvchi harakat *moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati* deyiladi.

Demak, (69.3) ning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = a\sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta). \qquad (69.10)$$

(69.10) dagi a va α harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

(69.9) dan ko'ramizki, majburiy tebranma harakat amplitudasi yoki nuqtaning eng katta dinamik siljishi:

$$A = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} \qquad (69.11)$$

bo'ladi.

(69.11) dan foydalanib, (69.9) ni quyidagi ko'rinishlarda yozish mumkin:

$$\text{agar } k > p \text{ bo'lsa, } x_2 = A\sin(pt + \delta),$$

va $\quad$ agar $k < p$ bo'lsa, $-A\sin(pt + \delta) = A\sin(pt + \delta - \pi)$.

Bu munosabatlarga binoan $k > p$ bo'lganda majburiy tebranish fazasi uyg'otuvchi kuch fazasi bilan bir xilda bo'ladi; $k < p$ holda esa majburiy tebranish fazasi uyg'otuvchi kuch fazasidan π ga orqada qoladi.

Majburiy tebranish amplitudasi bilan p/k nisbat orasidagi bog'lanishni tekshiraylik. Buning uchun (69.11) ni quyidagicha yozamiz:

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} = \frac{l_{st}}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)}, \qquad (69.12)$$

bunda $l_{st} = P_0/k^2$ bilan uyg'otuvchi kuchning maksimal qiymati Q_0 ta'sirida moddiy nuqtaning olgan statik siljishi belgilangan.

(69.11) dan ko'ramizki, majburiy tebranish amplitudasi uyg'otuvchi kuch hamda erkin tebranishning doiraviy takrorliklariga bog'liq.

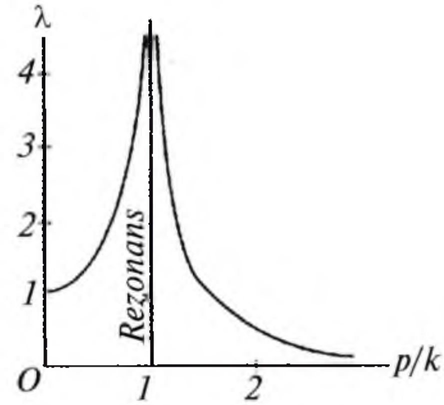
Moddiy nuqta dinamik siljishining statik siljishiga nisbati dinamik koeffitsiyent deyiladi. Uni λ bilan belgilaymiz:

$$\lambda = \frac{A}{l_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)}. \qquad (69.13)$$

Dinamik koeffitsiyent λ bilan $\frac{p}{k}$ orasidagi (69.13) bog'lanish grafigi 137-rasmda tasvirlangan.

Boshlang'ich shartlar $x=x_0$, $V = \dot{x}_0$ bo'lgan holdagi harakatni tekshirish uchun (69.3) differensial tenglamaning umumiy yechimini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \\ + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \qquad (69.14)$$



137-rasm.

(69.14) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \frac{P_0 p}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta). \qquad (69.15)$$

Moddiy nuqta harakatining boshlang'ich shartlarini (69.14) va (69.15) ga qo'ysak:

$$x_0 = C_2 + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin\delta, \ \dot{x}_0 = C_1 k + \frac{P_0 p}{k^2 - p^2} \cos\delta \qquad (69.16)$$

hosil bo'ladi.

(69.16) dan

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \cdot \frac{P_0}{k^2 - p^2} \cos\delta, \quad C_2 = x_0 - \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin\delta$$

kelib chiqadi. Demak, (69.14) quyidagicha yoziladi:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{P_0}{k^2 - p^2} \left(\sin\delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos\delta \sin kt \right) + \\ + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \qquad (69.17)$$

(69.16) dan ko'ramizki, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ hamda $p \approx k$ bo'lganda tebranish o'ziga xos ko'rinishga ega bo'ladi. Bu hol «tepish» holi deyiladi.

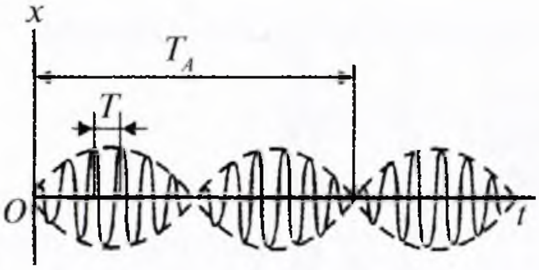
«Tepish» holining tenglamasi:

$$x \cong \frac{2P_0}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)]$$

yoki

$$x \cong \frac{2P_0}{k^2 - p^2} \sin \frac{p-k}{2} t \cdot \cos(pt + \delta) \qquad (69.18)$$

bo'ladi.



138-rasm.

(69.18) tenglama bilan ifodalanadigan harakatning doiraviy takrorligi p, davri $T = 2\pi/p$ amplitudasi davriy funksiya sifatida o'zgaruvchi tebranma harakatdan iborat deyish mumkin. Bu tebranish amplitudasi:

$$A(t) = \frac{2P_0}{k^2 - p^2} \sin \frac{p-k}{2} t.$$

Bu amplitudaning davri

$$T_A = \frac{4\pi}{p-k}$$

va u T ga nisbatan ancha katta bo'ladi.

(69.18) grafigi 138-rasmda ko'rsatilgan. Majburiy va erkin tebranish doiraviy takrorliklari bir xil bo'lgan ($p=k$) hol *rezonans holi* deb ataladi.

$p=k$ bo'lganda (69.3) differensial tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin(kt + \delta). \tag{69.19}$$

Rezonans holida (69.19) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda aniqlaymiz:

$$x_2 = Bt\cos(kt + \delta). \tag{69.20}$$

(69.20) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\ddot{x} = -2Bk\sin(kt + \delta) - Bk^2 t\cos(kt + \delta). \tag{69.21}$$

(69.20) va (69.21) ni (69.19) ga qo'ysak:

$$-2Bk\sin(kt + \delta) = P_0 \sin(kt + \delta) \tag{69.22}$$

hosil bo'ladi. (69.22) dan: $B = -\frac{P_0}{2k}$ kelib chiqadi.

Demak, (69.19) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

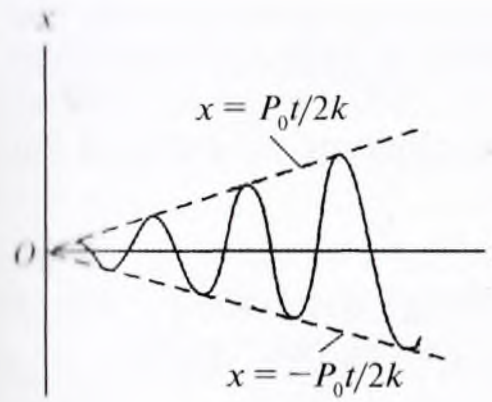
$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{P_0}{2k} t\sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \tag{69.23}$$

(69.23) dan ko'ramizki, nuqtaning harakati erkin va majburiy tebranishlar yig'indisidan iborat.

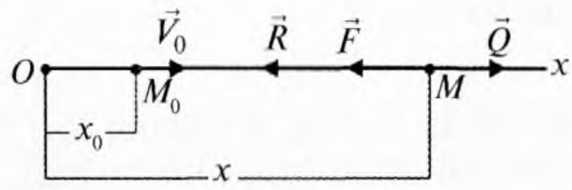
Rezonans holidagi majburiy tebranma harakat tenglamasi

$$x_2 = \frac{P_0}{2k} t\sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}) \tag{69.24}$$

bo'ladi.



139-rasm.



140-rasm.

(69.24) da $A = \frac{P_0 t}{2k}$ — majburiy tebranish amplitudasi, $kt + \delta - \frac{\pi}{2}$ — fazasi, k esa doiraviy takrorligidan iborat. (69.24) ga binoan, rezonans holatidagi majburiy tebranish fazasi uyg'otuvchi kuch fazasidan $\pi/2$ ga orqada qoladi, amplituda esa vaqtga proporsional o'zgaradi.

(69.24) tenglama bilan aniqlanuvchi harakat grafigi 139-rasmda tasvirlangan.

70- §. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatiga muhit qarshilik kuchining ta'siri

M moddiy nuqta qaytaruvchi, uyg'otuvchi kuchlar hamda muhitning qarshilik kuchi ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin. Boshlang'ich paytda M nuqta M_0 da bo'lib, uning absissasi x_0, tezligi V_0 bo'lsin (140-rasm).

Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + Q_x. \tag{70.1}$$

Bunda $F_x = -cx,\ R_x = -\mu \cdot \dot{x},\ Q_x = Q_0 \sin(pt + \delta)$

bo'lgani uchun (70.1) quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \cdot \dot{x} + Q_0 \sin(pt + \delta). \tag{70.2}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$2b = \frac{\mu}{m},\ k^2 = \frac{c}{m},\ P_0 = \frac{Q}{m}.$$

U holda (70.2) tenglama

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin(pt + \delta) \tag{70.3}$$

ko'rinishni oladi.

(70.3) tenglama muhit qarshilik kuchi ta'sir etganda *moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati differensial tenglamasidan* iborat.

(70.3) tenglamaning umumiy yechimi (68.4) tenglama umumiy yechimi bilan (70.3) tenglama xususiy yechimining yig'indisidan iborat, ya'ni:

$$x = x_1 + x_2,$$

bu yerda x_1 b va k larning son qiymatlariga qarab (68.6), (68.15) yoki (68.20) ko'rinishida bo'ladi, x_2 esa quyidagicha topiladi:

$$x_2 = D_1 \sin(pt + \delta) + D_2 \cos(pt + \delta). \qquad (70.4)$$

D_1 va D_2 o'zgarmaslarni aniqlash uchun (70.4) dan vaqt bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\dot{x}_2 = D_1 p \cos(pt + \delta) - D_2 p \sin(pt + \delta),$$

$$\ddot{x}_2 = -D_1 p^2 \sin(pt + \delta) - D_2 p^2 \cos(pt + \delta). \qquad (70.5)$$

(70.4) va (70.5) larni (70.3) ga qo'ysak:

$$\begin{aligned}
&-D_1 p^2 \sin(pt + \delta) - D_2 p^2 \cos(pt + \delta) + 2bD_1 p \cos(pt + \delta) - \\
&-2bD_2 p \sin(pt + \delta) + k^2 D_1 \sin(pt + \delta) + k^2 D_2 \cos(pt + \delta) = \\
&= P_0 \sin(pt + \delta)
\end{aligned} \qquad (70.6)$$

hosil bo'ladi.

(70.6) dan:

$$\begin{cases} D_1 (k^2 - p^2) - 2bpD_2 = P_0, \\ 2D_1 bp + D_2 (k^2 - p^2) = 0 \end{cases} \qquad (70.7)$$

kelib chiqadi.

(70.7) tenglamalar sistemasini yechsak:

$$D_1 = \frac{P_0 (k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}, \quad D_2 = -\frac{2P_0 bp}{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}. \qquad (70.8)$$

Natijada (70.3) differensial tenglamaning xususiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x_2 = \frac{P_0 (k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \sin(pt + \delta) - \frac{2P_0 bp}{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \cos(pt + \delta). \qquad (70.9)$$

Muhit qarshiligidagi majburiy tebranishni umumiy holda tekshirish qulay bo'lishi uchun D_1 va D_2 o'zgarmaslar o'rniga A_q va β o'zgarmaslarni kiritamiz. Ularni quyidagicha tanlaymiz:

$$D_1 = A_q \cos\beta, \quad D_2 = A_q \sin\beta. \qquad (70.10)$$

(70.10) ni avval kvadratga oshirib qo‘shsak, so‘ngra (70.10) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo‘lsak va (70.8)ni e’tiborga olsak:

$$A_q = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \tag{70.11}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{2pb}{k^2-p^2} \tag{70.12}$$

kelib chiqadi. (70.10) ni (70.4) ga qo‘yamiz. U holda

$$x_2 = A_q \sin(pt+\delta+\beta) \tag{70.13}$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, (70.3) differensial tenglamaning umumiy yechimi:

1) $b < k$ holda

$$x = ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}\cdot t+\alpha) + \frac{P_0\sin(pt+\delta+\beta)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}; \tag{70.14}$$

2) $b > k$ holda

$$x = e^{-bt}\left(C_1e^{t\sqrt{b^2-k^2}} + C_2e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right) + \frac{P_0\sin(pt+\delta+\beta)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}; \tag{70.15}$$

3) $b = k$ holda

$$x = e^{-bt}(C_1+C_2t) + \frac{P_0\sin(pt+\delta+\beta)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}} \tag{70.16}$$

tenglamalar bilan ifodalanadi va ulardagi a, α, C_1 va C_2 o‘zgarmaslar harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

Muhitning qarshilik kuchi ta’sir etganda moddiy nuqta tebranma harakatining grafigi $b < k$ hol uchun 141-rasmda ko‘rsatilgan; bunda majburiy tebranish grafigi punktir chiziq bilan tasvirlangan.

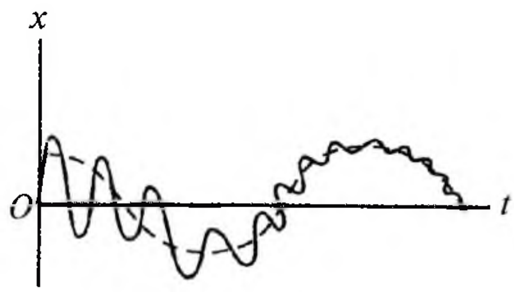
(70.14), (70.15) va (70.16) tenglamalardagi ikkinchi had, ya’ni:

$$x_2 = \frac{P_0\sin(pt+\delta+\beta)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}} \tag{70.17}$$

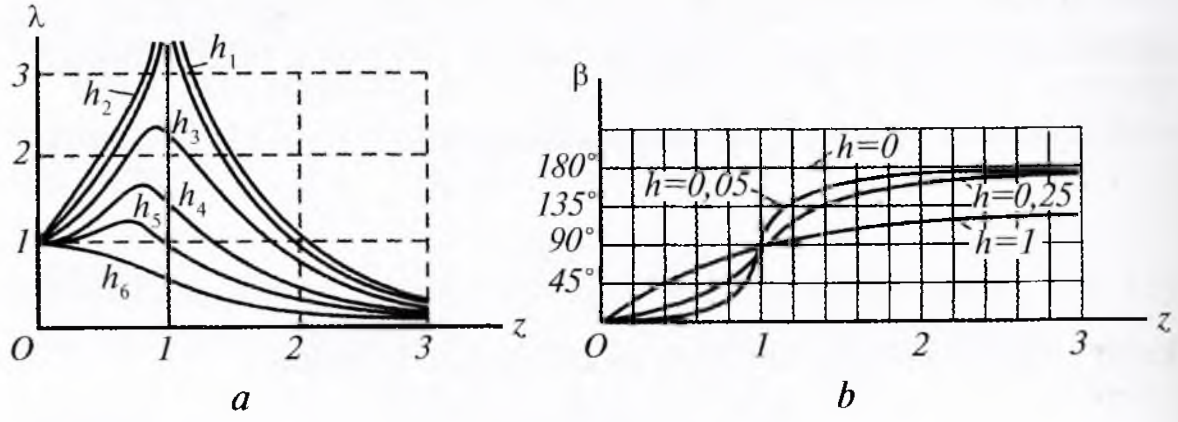
muhit qarshilik kuchi hisobga olingan holda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatini ifodalaydi.

Majburiy tebranish amplitudasi (70.11) tenglikdan aniqlanadi.

Majburiy tebranma harakatning dinamik koeffitsiyenti muhit qarshilik kuchi ta’sir etgan holda quyidagicha:



141-rasm.



142-rasm.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-p^2/k^2)^2 + 4b^2p^2/k^4}}.$$

Agar
$$\frac{p}{k} = z, \ \frac{b}{k} = h \tag{70.18}$$

deb belgilasak,
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4h^2z^2}} \tag{70.19}$$

bo'ladi. 142-rasm, *a* da λ va *z* orasidagi bog'lanish grafigi *h* ning turli qiymatlari uchun ko'rsatilgan.

Dinamik koeffitsiyent λ bilan p/k nisbat orasidagi bog'lanishni tekshirish uchun funksiyani tekshirish qoidasidan foydalanamiz.

(70.19) da kvadrat ildiz ostidagi ifodani $y(z)$ deb belgilaymiz:

$$y(z) = (1 - z^2)^2 + 4h^2z^2. \tag{70.20}$$

Bu funksiyaning ekstremumini topish uchun *z* bo'yicha hosila olamiz va hosilani nolga tenglashtirib, $z \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topamiz:

$$z_1 = 0, \ z_2 = \sqrt{1-2h^2}. \tag{70.21}$$

Endi $z_1=0$ uchun (70.20) dan ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz:

$$y''(0) = 4(2h^2 - 1).$$

Agar $2h^2 > 1$ yoki $h > \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $y''(0) > 0$. Shuning uchun $z_1 = 0$ da $y(z)$ funksiya minimumga erishadi. λ esa maksimum qiymatga ega bo'ladi. Bu hol uchun 142-rasm, *a* dagi $h=h_6$ mos keladi. $h > \frac{\sqrt{2}}{2}$ da $1 - 2h^2 < 0$ va $z_2 = \sqrt{1-2h^2}$ mavhum son bo'lib qoladi. Bu holda $y(z)$ funksiyaning ikkinchi ekstremumi bo'lmaydi. $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ holda $y''(0) < 0$. Natijada minimumga erishadi. $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ da

$z_2 = \sqrt{1-2h^2} > 0$ va $y''(z_2) > 0$ bo‘lib, λ maksimum qiymatni qabul qiladi. λ_{max} ni aniqlash uchun (70.19) dagi z o‘rniga z_2 qiymatini qo‘yamiz:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}}; \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ da } \lambda_{max} = 1.$$

Demak, $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo‘lgan holda majburiy tebranish amplitudasi maksimum qiymatga erishadi. Uni aniqlash uchun (70.21) ning ikkinchisiga (70.18) ni qo‘yamiz:

$$p = \sqrt{k^2 - 2b^2}. \tag{70.22}$$

(70.22) ni (70.11) ga qo‘ysak:

$$A_{max} = \frac{P_0}{2b\sqrt{k^2-b^2}} \tag{70.23}$$

kelib chiqadi.

Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga muhitning qarshilik kuchi ta’sir etganda majburiy tebranma harakat va uyg‘otuvchi kuchning doiraviy takrorliklari ham, tebranish davrlari ham bir xil bo‘lib, majburiy tebranish fazasi esa uyg‘otuvchi kuch fazasidan β ga farq qiladi. β — fazalar siljishi deb ataladi. Bu siljish (70.12) dan aniqlanadi.

(70.12) tenglik (70.18) ga ko‘ra quyidagicha yoziladi:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)} = \frac{2hz}{1-z^2}. \tag{70.24}$$

$z = 1$ holda $\mathrm{tg}\beta = \infty$; shuning uchun fazalar siljishi $\beta = \frac{\pi}{2}$ bo‘ladi.

$z = 0$ bo‘lganda $\mathrm{tg}\beta = 0$. Bu holda kichik takrorlikdagi majburiy tebranish ($p < k$) uchun $\beta = 0$, katta takrorlik ($p > k$) da esa $\beta = \pi$.

(70.24) dan ko‘ramizki, fazalar siljishi z ga hamda qarshilik koeffitsiyenti h ga bog‘liq. β bilan z orasidagi munosabat grafigi h ning har xil qiymatlari uchun 142-rasm, b da ko‘rsatilgan.

71- §. Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga doir masalalar yechish

Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga oid masalalar quyidagi tartibda yechiladi.

1. Moddiy nuqtaning statik muvozanat holati koordinata boshi deb qabul qilinib, harakat yo‘nalishi bo‘yicha koordinata o‘qi yo‘naltiriladi.

2. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.

3. Moddiy nuqta harakatining boshlang'ich shartlari aniqlab olinadi.

4. Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi tuziladi.

5. Tuzilgan differensial tenglama turiga qarab uning yechimi yoziladi.

6. Topilgan yechim fizik nuqtayi nazardan tahlil etilib, kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

39-masala. Bikirliklari $c_1 = 2$ N/m, $c_2 = 4$ N/m, $c_3 = 6$ N/m bo'lgan uchta ketma-ket ulangan prujinaga yuk osilgan. Mazkur prujinalar uchun ekvivalent prujinaning bikirlik koeffitsiyenti aniqlansin (143-rasm).

Yechish. Yukning statik muvozanat holatini, ya'ni yukning og'irlik kuchi bilan prujinalar elastiklik kuchi muvozanatlashadigan nuqtani koordinata boshi deb olamiz. Ox o'qni harakat yo'nalishi bo'yicha vertikal pastga yo'naltiramiz.

Bikirliklari turlicha bo'lgan uchta prujinani ularga ekvivalent bitta prujina bilan almashtiramiz. Ekvivalent prujinaning bikirlik koeffitsiyentini aniqlash uchun M yukning prujinalarga ta'sirini tekshiramiz. Yuk ta'sirida uchchala prujina cho'ziladi.

M yuk tinch holatda bo'lganda uning og'irligi prujinalarning elastiklik kuchi bilan muvozanatlashadi hamda

$$G = c_1 f_{1st},\ G = c_2 f_{2st},\ G = c_3 f_{3st},\ G = c_{ekv} f_{st}, \qquad (71.1)$$

bundan $f_{1st} = \dfrac{G}{c_1},\ f_{2st} = \dfrac{G}{c_2},\ f_{3st} = \dfrac{G}{c_3}$ kelib chiqadi.

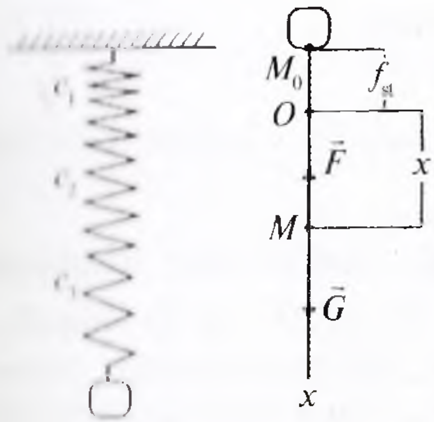
Prujinalar ketma-ket ulangani uchun ularning umumiy statik cho'zilishi uchchala prujina cho'zilishining yig'indisiga teng:

$$f_{st} = f_{1st} + f_{2st} + f_{3st} \quad \text{yoki} \quad f_{st} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} + \frac{G}{c_3}.$$

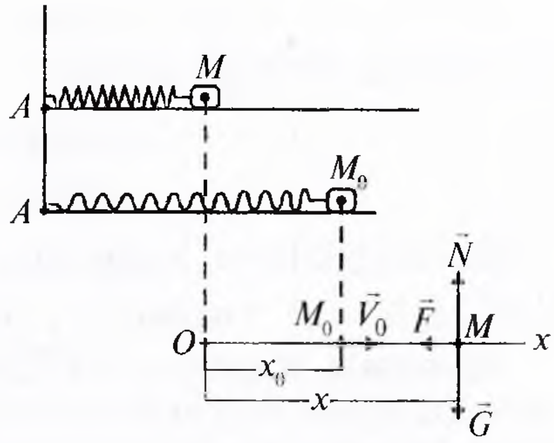
Son qiymatlarni qo'ysak: $f_{st} = \dfrac{11G}{12} = \dfrac{11mg}{12}$.

(71.1) dan $c_{ekv} = \dfrac{G}{f_{st}} = \dfrac{mg}{f_{st}}$ yoki $c_{ekv} = \dfrac{12mg}{11mg} = 1{,}09$ N/m kelib chiqadi.

40-masala. Og'irligi G=100 N bo'lgan M jism silliq gorizontal tekislikda turadi. Bu jism prujinaga biriktirilgan. Prujina esa A nuqtaga mahkamlangan (144-rasm). M jism o'ng tomonga x_0=0,05 m masofaga surilib V=1 m/s boshlang'ich tezlik bilan qo'yib yuborilgan. Prujinaning bikirlik koeffitsiyenti $c = 10^4$ N/m. M jism tebranma harakatining tenglamasi tuzilsin hamda tebranish davri aniqlansin.



143-rasm.



144-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasini 144-rasmda ko'rsatilgandek tanlaymiz. M jismni moddiy nuqta desak, unga og'irlik kuchi $\vec{G}$, silliq sirtning reaksiya kuchi $\vec{N}$ hamda prujinaning elastiklik kuchi $\vec{F}$ ta'sir qiladi.

Boshlang'ich paytda $x_0 = 0,05$ m, $V_0 = 1$ m/s. $F_x = -cx$ bo'lgani uchun M nuqtaning harakati differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 ,$$

bunda
$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = 31,4\ \text{s}^{-1} .$$

M nuqta harakati differensial tenglamasining boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi (67.7) ga ko'ra quyidagicha bo'ladi:

$$x = (0,05\cos 31,4t + \frac{1}{31,4}\sin 31,4t)\ \text{m}$$

yoki
$$x = (0,05\cos 31,4t + 0,03\sin 31,4t)\ \text{m}.$$

M jism tebranma harakatining tebranish davri (67.11) ga binoan

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{31,4} = 0,2\ \text{s}$$

bo'ladi.

41-masala. Moddiy nuqta $x = e^{-0,05t}(0,3\cos 5t + 0,5\sin 5t)$ qonuniga ko'ra tebranma harakat qiladi. Mazkur nuqta harakat qonunini $x = ae^{-ht}\sin(k_1 t + \alpha)$ ko'rinishda yozish uchun a qanday bo'lishi kerakligi aniqlansin.

Yechish. Masala shartidagi tebranma harakat qonunidan:

$$C_1 = 0,3,\ C_2 = 0,5. \qquad (71.2)$$

Bizga ma'lumki, (71.2) dagi C_1 va C_2 o'zgarmaslar (67.8) ga asosan quyidagicha aniqlanar edi:

$$C_1 = a\sin\alpha,\ C_2 = a\cos\alpha\,. \tag{71.3}$$

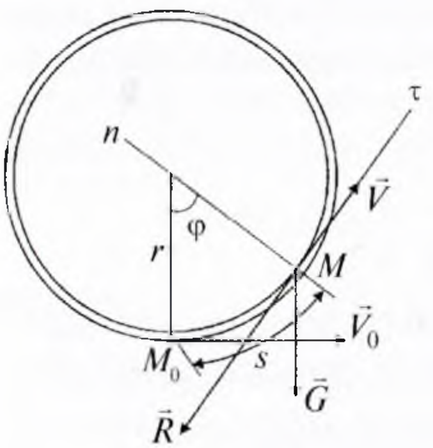
(71.2) ni (71.3) ga qo'ysak:

$$\begin{cases} 0{,}3 = a\sin\alpha, \\ 0{,}5 = a\cos\alpha. \end{cases}$$

Bu tengliklarni kvadratga ko'tarib, hadma-had qo'shsak: $0{,}3^2 + 0{,}5^2 = a^2$, bundan $a = \sqrt{0{,}09 + 0{,}25} = 0{,}583$ kelib chiqadi.

42-masala. Radiusi $r = 49$ sm bo'lgan, vertikal tekislikda yotuvchi truba ichida M sharcha joylashgan. Sharchaga tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi $R = 4mV$ ta'sir qiladi. Sharchaning muvozanat holatidan chetga chiqishi juda kichik, boshlang'ich tezligi V=20 sm/s deb hisoblanib, uning harakat tenglamasi tuzilsin (g=980 sm/s^2).

Yechish. Masala shartiga ko'ra og'ir moddiy nuqta vertikal tekislikda radiusi r bo'lgan truba ichida tebranadi (145-rasm). Bu masalani yechish uchun $M\tau n$ tabiiy koordinata sistemasini tanlab olamiz.



145-rasm.

M moddiy nuqtaga og'rlik kuchi $\vec{G}$, qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta'sir qiladi.

M_0 nuqtani sanoq boshi deb olsak, s_0=0, V_0=20 sm/s.

M moddiy nuqtaning harakati differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$m\frac{dV}{dt} = R_\tau + G_\tau \quad \text{yoki}$$

$$m\frac{dV}{dt} = -4mV - G\sin\varphi\,.$$

φ juda kichik bo'lgani sababli $\sin\varphi \approx \varphi$.

Natijada: $m\dfrac{dV}{dt} = -4mV - mg\varphi$ kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{dV}{dt} = -4V - g\frac{r\varphi}{r}. \tag{71.4}$$

$s = r\varphi$, $V = \dot{s}$ bo'lgani sababli (71.4) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\ddot{s} + 4\dot{s} + \frac{g}{r}s = 0\,. \tag{71.5}$$

$b = 2,\ k^2 = \frac{g}{r}$ belgilashlarni kiritib (71.5) tenglamani quyidagicha ifodalaymiz:

$$\ddot{s} + 2b\dot{s} + k^2 s = 0\,. \tag{71.6}$$

$k = \sqrt{\dfrac{g}{r}} = \sqrt{20}\ s^{-1}$, binobarin, $k > b$ bo‘lgani uchun (71.6) tenglamaning yechimi (68.6)ga ko‘ra aniqlanadi:

$$x = ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}\,t + \alpha),$$

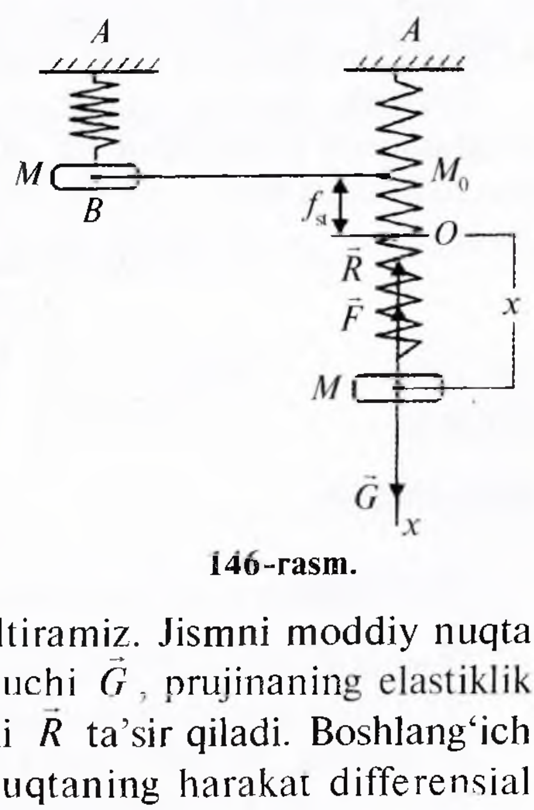
bundagi a va b (68.9) formulalardan topiladi:

$$a = \sqrt{\frac{(k^2 - b^2)s_0^2 + (V_0 + bs_0)^2}{k^2 - b^2}} = 5 \text{ sm},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{s_0\sqrt{k^2 - b^2}}{V_0 + bs_0} = 0, \ \alpha = 0.$$

Shunday qilib, M nuqta $s = 0{,}05e^{-2t}\sin 4t$ m qonun bilan so‘nuvchi tebranma harakat qiladi.

43-masala. m massali M jism bikirlik koeffitsiyenti c bo‘lgan AB prujina B uchiga osilgan. M jism ta’sirida prujinaning statik cho‘zilishi f_{st} ga teng. Jismga muhitning qarshilik kuchi $R = 2\sqrt{mc}\dot{x}$ ta’sir qiladi. Boshlang‘ich paytda M jism o‘zining statik muvozanat holatida bo‘lib, tezligi V_0 ga teng (146-rasm). M jismning harakat qonuni aniqlansin.



146-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasining boshini M jismning statik muvozanat holati bo‘lgan O nuqtada olamiz. Ox o‘qni vertikal pastga yo‘naltiramiz. Jismni moddiy nuqta deb qaraymiz. Bu nuqtaga og‘irlik kuchi $\vec{G}$, prujinaning elastiklik kuchi $\vec{F}$, muhitning qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta’sir qiladi. Boshlang‘ich paytda $x_0 = 0$, $\dot{x} = V_0$. M moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x} = G - c(x + f_{st}) - 2\sqrt{mc}\dot{x}. \qquad (71.7)$$

M nuqtaning statik muvozanat holatida $G = cf_{st}$ bo‘lgani uchun (71.7) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$m\ddot{x} + 2\sqrt{mc}\dot{x} + cx \quad \text{yoki} \quad \ddot{x} + 2\sqrt{\frac{c}{m}}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

bunda

$$k^2 = \frac{c}{m}, \ 2\sqrt{\frac{c}{m}} = 2b. \qquad (71.8)$$

Belgilashlar qabul qilsak:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \tag{71.9}$$

hosil bo'ladi.

(71.8) dan ko'ramizki, c va m ning har qanday qiymatlari uchun $b=k$. Binobarin (71.9) differensial tenglama yechimi (68.22) ko'rinishda bo'ladi:

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + (V_0 + bx_0)t\right]. \tag{71.10}$$

(71.10) ga boshlang'ich shartlar va $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{f_{st}}}$ ni qo'ysak, M jismning harakat qonuni kelib chiqadi:

$$x = V_0 t e^{-t\sqrt{g/f_{st}}}.$$

44-masala. Massasi $m = 3$ kg bo'lgan jism prujinaga osilgan bo'lib, unga vertikal ravishda uyg'otuvchi kuch $Q = 10\sin 5t$ ta'sir qiladi. Dinamik koeffitsiyent $\lambda=4$. Prujinaning bikirlik koeffitsiyenti topilsin.

Yechish. Mazkur masalani moddiy nuqta harakati differensial tenglamasini tuzmasdan hal etish mumkin. Buning uchun (69.13) dan foydalanamiz:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{k^2}}, \quad k^2 = \frac{c}{m},$$

bundan: $$k^2 = \frac{p^2\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{yoki} \quad \frac{c}{m} = \frac{p^2\lambda}{\lambda - 1} \tag{71.11}$$

kelib chiqadi.

(71.11) dan: $$c = m\frac{p^2\lambda}{\lambda - 1}. \tag{71.12}$$

Masala shartiga ko'ra uyg'otuvchi kuch $Q=10\sin 5t$ bo'lib, $p=5$. (71.12) ga son qiymatlarni qo'ysak, $c=100$ N/m kelib chiqadi.

45-masala. Moddiy nuqtaning harakati differensial tenglamasi $\ddot{x} + 81x = 12\sin 5t$. Majburiy tebranma harakati amplitudasi aniqlansin.

Yechish. Mazkur masalani hal etishda (69.11) dan foydalanamiz:

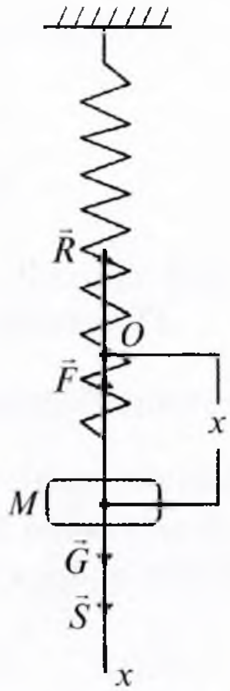
$$A = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|}.$$

Masala shartidagi moddiy nuqta harakati differensial tenglamasidan:

$$P_0 = 12, \quad k^2 = 81, \quad p = 5.$$

Natijada $A = \dfrac{12}{81-25} = \dfrac{12}{56} = \dfrac{3}{14} = 0,214$ (uzun. bir) bo'ladi.

46-masala. Bikirlik koeffitsiyenti c=4000 N/m bo'lgan prujinaga og'irligi G=20 N bo'lgan M jism osilgan (147-rasm). Moddiy nuqta deb qaraluvchi bu jismga davriy ravishda o'zgaruvchi $S = 117{,}72\sin pt$ N uyg'otuvchi kuch va tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan $R = 5\sqrt{mc}\dot{x}$ N qarshilik kuchi ta'sir qiladi (m – jism massasi). Uyg'otuvchi kuchning doiraviy takrorligi p qanday bo'lganda majburiy tebranish amplitudasi A eng katta qiymatga erishadi?



147-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasining boshi qilib jismning statik muvozanat holatini olamiz. Ox o'qni vertikal bo'yicha harakat yo'nalishi tomon yo'naltiramiz.

M nuqtaga $\vec{G}$ og'irlik kuchi, $\vec{F}$ qaytaruvchi kuch, $\vec{R}$ qarshilik kuchi hamda $\vec{S}$ uyg'otuvchi kuch ta'sir qiladi.

M nuqtaning harakati differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = G - c(x + f_{st}) - 5\sqrt{mc}\dot{x} + 117{,}72\sin pt .$$

Bu ifodaning har ikki tomonini m ga bo'lib, $G=cf_{st}$ ni e'tiborga olsak, u

$$\ddot{x} + 0{,}5\sqrt{c/m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{117{,}72}{m}\sin pt \qquad (71.13)$$

ko'rinishga keladi.

$$0{,}5\sqrt{c/m} = 2b, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{117{,}72}{m} = P_0 \qquad (71.14)$$

belgilashlar olinsa, (71.13) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt .$$

(71.14) ga son qiymatlarni qo'ysak:

$$b = 11{,}06\,\text{s}^{-1}, \quad k = 44{,}2\,\text{s}^{-1}, \quad P_0 = 58{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad (71.15)$$

kelib chiqadi.

Masala shartidagi noma'lumlarni aniqlash uchun (71.13) differensial tenglamaning yechimini aniqlash shart emas.

(70.18) ko'ra $b/k = h$; bundan $h = \dfrac{11{,}06}{44{,}2} \approx 0{,}3 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ bo'ladi. Bu holda uyg'otuvchi kuch doiraviy takrorligi (70.22) formuladan, majburiy tebranish amplitudasining maksimum qiymati esa (70.23) formuladan foydalanib aniqlanadi.

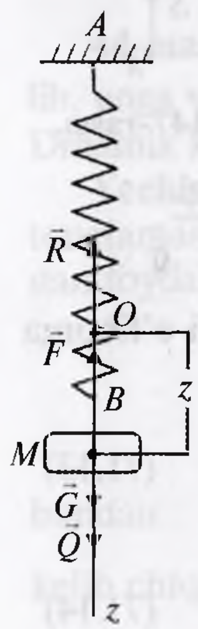
(71.15) ni (70.22) va (70.23) ga qo'ysak:

$$p = \sqrt{k^2 - 2b^2} = \sqrt{1960 - 242} = 41{,}5 \ 1/\text{s},$$

$$A_{\max} = \frac{P_0}{2b\sqrt{k^2 - b^2}} = 0{,}0321 \ \text{m}$$

kelib chiqadi.

47-masala. m massali M jism bikirlik koeffitsiyenti c bo'lgan AB prujina uchiga osilgan. Jismga $Q_z = H\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t$ uyg'otuvchi kuch hamda muhitning qarshilik kuchi $R = -\mu\dot{z}$ ta'sir qiladi. Jism majburiy tebranma harakatining qonuni hamda majburiy tebranish amplitudasi aniqlansin (148-rasm).



148-rasm.

Yechish. Jismning statik muvozanat holatini sanoq sistemasining boshi qilib olamiz. Oz o'qni vertikal bo'ylab, nuqta harakati tomon yo'naltiramiz. Jismni moddiy nuqta deb qarasak, unga og'irlik kuchi $\vec{G}$, uyg'otuvchi kuch $\vec{Q}$, qaytaruvchi kuch $\vec{F}$ va muhitning qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta'sir qiladi.

Masalani yechish uchun M nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{z} = G - c(z + f_{st}) - \mu\dot{z} + H\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

Bu yerda $C = cf_m$ bo'lishini e'tiborga olib,

$$b = \frac{\mu}{2m}, \ k = p = \sqrt{\frac{c}{m}}, \ P_0 = \frac{H}{m} \qquad (71.16)$$

belgilashlar kiritsak, differensial tenglama:

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + k^2 z = P_0 \sin pt \qquad (71.17)$$

ko'rinishni oladi.

Jismning majburiy tebranma harakati tenglamasini aniqlash uchun (71.17) ning xususiy yechimini topish kerak. U (70.13) tenglama yordamida aniqlanadi:

$$x_2 = A_q \sin(pt + \beta). \qquad (71.18)$$

Bu ifodadagi A_q va β (70.11) hamda (70.12) formulalardan foydalanib topiladi.

(71.16) ni (70.11) va (70.12) ga qo'ysak,

$$A_q = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{m}{c}}, \ \beta = \frac{\pi}{2}$$

kelib chiqadi.

Demak, M jismning majburiy tebranma harakati

$$z = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

? *Nazorat savollari*

1. Tebranma harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tebranma harakatni izohlaydigan qanday asosiy parametrlar bor?
3. Davr deb nimaga aytiladi?
4. Chastota deganda nimani tushunasiz?
5. Faza deb nimaga aytiladi?
6. Tebranma harakat necha xil bo'ladi?
7. Erkin tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
8. Qanday harakat majburiy tebranma harakat deyiladi?
9. So'nuvchi tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
10. $\ddot{x} - k^2x = 0$ formulada k^2 bilan qanday nisbat belgilangan?
11. Tebranma harakat amplitudasi deb nimaga aytiladi?
12. Moddiy nuqtaning garmonik tebranma harakati tenglamasini yozing.
13. Rezonans hodisasini izohlang.
14. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini yozing.
15. Moddiy nuqta erkin tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.
16. Moddiy nuqta so'nuvchi tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.
17. Qarshilik kichik ($b < k$) bo'lganda so'nuvchi tebranma harakat qonuni qanday yoziladi?
18. Moddiy nuqta majburiy tebranma harakatining (muhit qarshiligi hisobga olinmagan holdagi) differensial tenglamasini yozing.
19. Moddiy nuqta majburiy tebranma harakat (muhit qarshiligi hisobga olinmagan holdagi) qonunini yozing.
20. Qanday harakat aperiodik harakatdan iborat?
21. Muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini yozing.
22. Muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat qonunini yozing.
23. «Tepish» holi nima?
24. So'nuvchi tebranishda amplituda qanday o'zgaradi?
25. Aperiodik harakat tenglamasi qanday?
26. Dekrement nima?
27. Dinamik koeffitsiyent qanday aniqlanadi?
28. Rezonans holda majburiy tebranma harakat qonunini yozing.
29. Fazalar siljishi nima?
30. Qaytaruvchi va qarshilik kuchining koeffitsiyentlari teng bo'lganda moddiy nuqta aperiodik harakatining tenglamasi qanday bo'ladi?

XIV BOB. MEXANIK SISTEMA VA MODDIY NUQTA DINAMIKASINING UMUMIY TEOREMALARI

72- §. Mexanik sistema. Ichki va tashqi kuchlar

Harakatlari o'zaro bir-biriga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar sistemasi *mexanik sistema* deyiladi. Mexanik sistema erkin va bog'langan holatda bo'lishi mumkin.

Mexanik sistema nuqtalarining harakati hech qanday sabab bilan chegaralanmagan, ya'ni nuqtalar orasidagi bog'lanishlar o'zaro ta'sir kuchidan iborat bo'lsa, mazkur sistema *erkin sistema* bo'ladi.

Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralangan, ya'ni mazkur sistema nuqtalariga bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u *bog'lanishdagi sistema* deb ataladi.

Erkin mexanik sistemaga misol qilib Quyosh sistemasini olish mumkin, chunki Quyosh va planetalar o'zaro butun olam tortilish kuchi ta'sirida bo'ladi.

Bog'lanishdagi mexanik sistemaga har qanday mashina mexanizmlarini misol qilib keltirish mumkin. Chunki mashina mexanizmlarining qismlari bir-birlari bilan sharnirlar, sterjenlar, qayishlar yoki tishli g'ildiraklar vositasida bog'langan bo'ladi.

Sistemaning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmay qolsa, u *o'zgarmas sistema* deb ataladi. Bunday sistemaga qattiq jism misol bo'la oladi.

Mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar shartli ravishda ichki va tashqi kuchlarga ajratiladi. Mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning o'zaro ta'siri i c h k i k u c h l a r deyiladi.

Mexanik sistema tarkibiga kirmaydigan jism (nuqta)lar tomonidan qo'yilgan kuchlar t a s h q i k u c h l a r deb ataladi.

Ichki kuchlar $\vec{F}^i$, tashqi kuchlar $\vec{F}^e$, shuningdek, ichki kuchlar bosh vektori $\vec{R}^i$, tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e$ bilan belgilanadi.

Biror sistema uchun tashqi deb hisoblanadigan kuch ikkinchi sistemaga nisbatan ichki kuch bo'lishi ham mumkin. Masalan, butun Quyosh sistemasining harakati tekshirilganda planetalarning o'zaro tortishish kuchi ichki kuch hisoblanadi. Yerning o'z orbitasi bo'ylab Quyosh atrofidagi harakati tekshirilganda tortishish kuchi tashqi kuch bo'ladi.

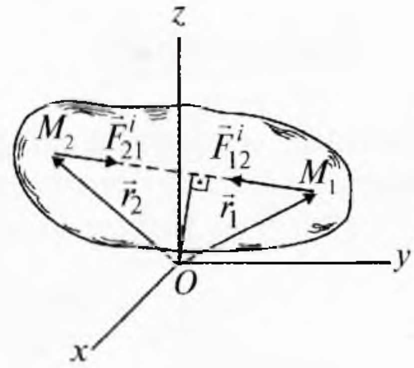
Ichki kuchlar xossalarini ko'rib chiqamiz.

1. Sistema ichki kuchlarining bosh vektori nolga teng. Haqiqatan, Nyutonning 3-qonuniga ko'ra sistema ixtiyoriy ikki M_1 va M_2 nuqtalarining o'zaro ta'sir kuchlari miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan (149-rasm): $\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$.

Binobarin, $\vec{F}_{12}^{i} + \vec{F}_{21}^{i} = 0$. Bu xulosani sistemaning barcha nuqtalari uchun tatbiq etish mumkin. Shunday qilib:

$$\vec{R}^{i} = \sum \vec{F}_{\nu}^{i} = 0. \qquad (72.1)$$

(72.1) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:



149-rasm.

$$R_x^{i} = \sum F_{\nu x}^{i} = 0, \quad R_y^{i} = \sum F_{\nu y}^{i} = 0,$$

$$R_z^{i} = \sum F_{\nu z}^{i} = 0 \qquad (72.2)$$

hosil bo'ladi.

2. Ichki kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng:

$$\overrightarrow{M}_0^{i} = \sum \vec{m}_0 (\vec{F}_{\nu}^{i}) = 0. \qquad (72.3)$$

Bu xossaning o'rinli bo'lishi ham Nyutonning uchinchi qonunidan foydalanib ko'rsatiladi.

(72.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$M_x^{i} = \sum m_x (\vec{F}_{\nu}^{i}) = 0, \quad M_y^{i} = \sum m_y (\vec{F}_{\nu}^{i}) = 0, \quad M_z^{i} = \sum m_z (\vec{F}_{\nu}^{i}) = 0$$

kelib chiqadi.

Ichki kuchlarning bu xossalaridan ichki kuchlar o'zaro muvozanatlashadi degan natija kelib chiqmaydi, chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo'yilgan. Shuning uchun ichki kuchlar sistema nuqtalarining o'zaro ko'chishiga ta'sir qiladi. Absolut qattiq jism o'rganilayotganda ichki kuchlar muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi.

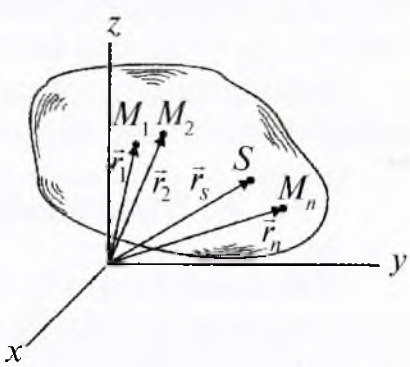
73- §. Mexanik sistema massasi va massa markazi

Mexanik sistemaning harakati faqat ta'sir kuchlarigagina emas, balki massaning taqsimlanishiga ham bog'liq. Bunday kattaliklar haqidagi ta'limot m a s s a l a r g e o m e t r i y a s i deb ataladi.

Mexanik sistema $M_1, M_2, \ldots, M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lib, ularning massalari mos ravishda $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bo'lsin (150-rasm).

Sistema nuqtalari massalarining arifmetik yig'indisiga sistemaning massasi deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$M = \sum m_{\nu}. \qquad (73.1)$$



150-rasm.

Radius-vektori $$\vec{r}_S = \frac{\sum m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum m_\nu} \tag{73.2}$$

formula yordamida aniqlanadigan geometrik nuqta – *S sistemaning inersiya (massa) markazi* deb ataladi.

(73.2) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$x_S = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{\sum m_\nu}, \quad y_S = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{\sum m_\nu}, \quad z_S = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{\sum m_\nu} \tag{73.3}$$

kelib chiqadi.

Ma'lumki, og'irlik markazining radius-vektori quyidagicha aniqlanar edi:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum G_\nu \vec{r}_\nu}{\sum G_\nu}. \tag{73.4}$$

(73.2) formulaning tashqi ko'rinishi (73.4) ga o'xshasa ham mazmun jihatidan farq qiladi. Og'irlik markazi jismga ta'sir qiluvchi og'irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasidir. Og'irlik markazi tushunchasi faqat qattiq jismgagina tegishli. Inersiya markazi tushunchasi har qanday moddiy nuqtalar sistemasiga tegishli bo'lib, u sistemadagi massa taqsimlanishining xarakteristikasidan iborat. Shuningdek, bu tushuncha sistemaga qanday kuchlar ta'sir qilayotganiga bog'liq emas.

(73.2), (73.3) dan mos ravishda

$$M\vec{r}_S = \sum m_\nu \vec{r}_\nu \tag{73.5}$$

va $$Mx_S = \sum m_\nu x_\nu, \quad My_S = \sum m_\nu y_\nu, \quad Mz_S = \sum m_\nu z_\nu \tag{73.6}$$

kelib chiqadi.

(73.5) sistemaning qutbga nisbatan statik momenti, (73.6) esa sistemaning *Oyz, Oxz, Oxy* tekisliklarga nisbatan statik momenti deb ataladi.

Sistema inersiya markazini qutb deb olsak, shu markazga nisbatan sistemaning statik momenti nolga teng bo'ladi:

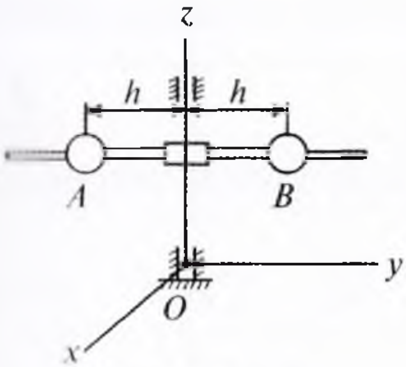
$$\sum m_\nu \rho_\nu = M\rho_S = 0,$$

bunda ρ_ν orqali M_ν nuqtaning inersiya markaziga nisbatan radius-vektori, ρ_S bilan esa inersiya markazining radius-vektori berilgan.

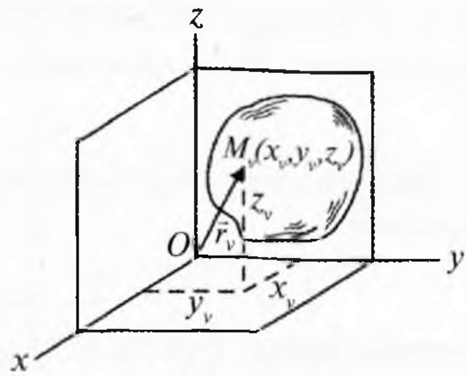
Sistemaning inersiya markazidan o'tuvchi ixtiyoriy tekislikka nisbatan statik momenti ham nolga teng bo'ladi.

74- §. Sistemaning inersiya momenti. Inersiya radiusi

Massa markazining holati sistemada massa taqsimlanishini to'liq xarakterlamaydi. Masalan, *Oz* o'qdan *h* masofada turuvchi ikkita bir xil *A* va *B* sharlar holatini bir xil masofaga o'zgartirsak (151-rasm),



151-rasm.



152-rasm.

sistema massa markazining holati o'zgarmaydi. Lekin sistemada massa taqsimlanishi o'zgaradi, ya'ni A va B sharlarning Oz o'q atrofidagi aylanishi yo tezlashadi yoki sekinlashadi.

Sistemaning aylanma harakatidagi massa taqsimlanishini uning inersiya momenti xarakterlaydi.

Sistemaning o'qqa, nuqtaga va tekislikka nisbatan inersiya momentlari tushunchalari bilan tanishib chiqamiz. Ixtiyoriy O nuqtadan uchta o'zaro perpendikular o'qlarni, shuningdek, koordinata tekisliklarini o'tkazamiz (152-rasm).

Sistemaning biror o'qqa nisbatan inersiya momenti deb sistema har bir zarrachasi massasini shu zarrachadan mazkur o'qqacha bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmasining butun sistema zarrachalari bo'yicha olingan yig'indisiga aytiladi.

Sistemaning Oz o'qqa nisbatan inersiya momentini I_z bilan belgilasak, ta'rifga muvofiq:

$$I_z = \sum m_v h_v^2, \tag{74.1}$$

bunda M_v nuqtadan Oz o'qqacha bo'lgan masofa h_v deb olingan.

Inersiya momentining SI sistemadagi o'lchov birligi kgm^2, texnik sistemada esa kgms^2 bo'ladi.

O'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaganda sistema zarrachalaridan o'qqacha bo'lgan masofani shu zarrachalar koordinatalari orqali ifodalash mumkin.

M_v moddiy nuqta koordinatalarini x_v, y_v, z_v desak, sistemaning Ox, Oy, Oz o'qlariga nisbatan inersiya momentlari quyidagicha yoziladi:

$$I_x = \sum m_v (y_v^2 + z_v^2),\ I_y = \sum m_v (x_v^2 + z_v^2),\ I_z = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2). \tag{74.2}$$

Sistemaning koordinatalar boshiga nisbatan inersiya momenti

$$I_0 = \sum m_v r_v^2 = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \tag{74.3}$$

bo'ladi.

(74.2) ifodalarni hadlab qo'shib, (74.3) bilan taqqoslasak, sistemaning koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti bilan koordinata o‘qlariga nisbatan inersiya momentlari orasidagi quyidagi bog‘lanishni hosil qilamiz:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z . \tag{74.4}$$

Sistemaning yOz, xOz va xOy tekisliklarga nisbatan inersiya momentlari:

$$I_{yOz} = \sum m_\nu x_\nu^2, \ I_{xOz} = \sum m_\nu y_\nu^2, \ I_{xOy} = \sum m_\nu z_\nu^2 \tag{74.5}$$

formulalardan foydalanib topiladi.

Bir jinsli jismning biror o‘qqa nisbatan inersiya momentini uning shu o‘qqa nisbatan inersiya radiusi deb ataluvchi chiziqli kattalik ρ_z dan foydalanib ham aniqlash mumkin:

$$I_z = M\rho_z^2 . \tag{74.6}$$

Bir jinsli jismning o‘qqa nisbatan inersiya radiusi tajribalar orqali aniqlanib, jadvallarda beriladi.

Agar jismning biror o‘qqa nisbatan inersiya momenti aniq bo‘lsa, uning shu o‘qqa nisbatan inersiya radiusini (74.6) ga ko‘ra

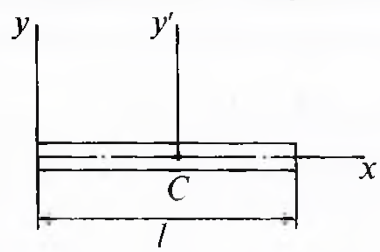
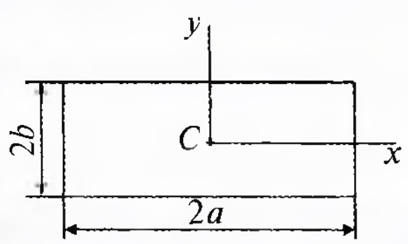
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \tag{74.7}$$

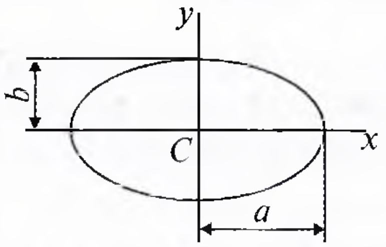
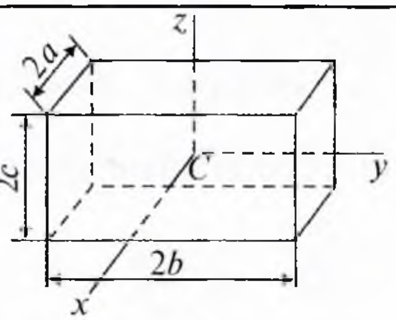
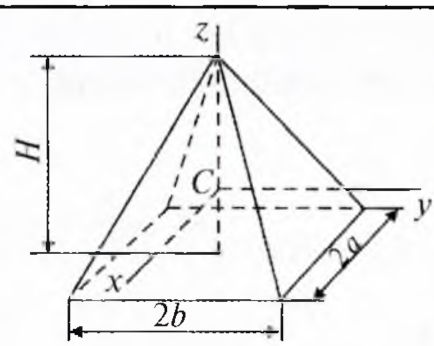
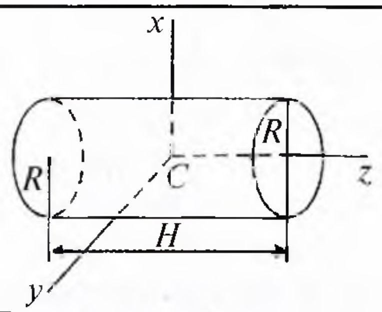
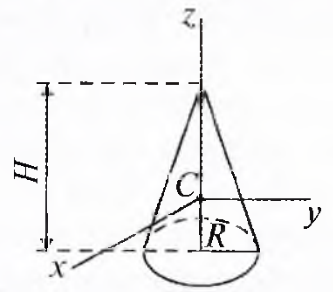
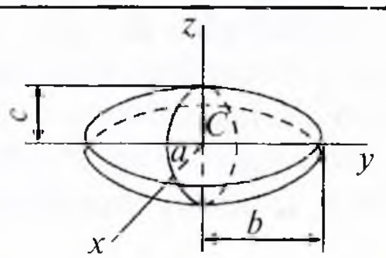
formuladan aniqlash mumkin.

Qattiq jismning markazdan qochma inersiya momentlari quyidagicha topiladi:

$$I_{yz} = \sum m_\nu y_\nu z_\nu , \ I_{zx} = \sum m_\nu z_\nu x_\nu , \ I_{xy} = \sum m_\nu x_\nu y_\nu . \tag{74.8}$$

75- §. Ba’zi bir jinsli jismlarning inersiya momentlari

Jism xili	Jism shakli	Inersiya momenti
1	2	3
Ingichka sterjen		$I_y = \frac{1}{3}Ml^2$, $I_{y'} = \frac{1}{12}Ml^2$
To‘g‘ri to‘rtburchak		$I_x = \frac{1}{3}Mb^2$, $I_y = \frac{1}{3}Ma^2$, $I_{Cz} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

1	2	3
Ellips		$I_x = \frac{1}{4}Mb^2, I_y = \frac{1}{4}Ma^2,$ $I_{Cz} = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$
To'g'ri burchakli parallellopiped		$I_x = \frac{1}{3}M(b^2 + c^2),$ $I_y = \frac{1}{3}M(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
To'g'ri burchakli piramida		$I_x = \frac{M}{20}(\frac{3}{4}H^2 + 4b^2),$ $I_y = \frac{M}{20}(\frac{3}{4}H^2 + 4a^2),$ $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
Doiraviy silindr		$I_x = I_y = \frac{M}{4}(\frac{H^2}{3} + R^2),$ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$
Doiraviy konus		$I_x = I_y = \frac{3M}{20}(\frac{H^2}{4} + R^2),$ $I_z = \frac{3}{10}MR^2$
Ellipsoid		$I_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2),$ $I_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$

76- §. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamalari

Mexanik sistema M_1, M_2, ..., M_n nuqtalardan tashkil topgan bo'lib, sistema nuqtalariga tashqi va ichki kuchlar ta'sir etadi. Bu sistemaning har bir M_ν nuqtasi uchun dinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i . \qquad (76.1)$$

M_ν nuqta radius-vektorini $\vec{r}_\nu$, tezligini $\vec{V}_\nu$ desak, uning tezlanishi $\vec{a}_\nu = \frac{dV_\nu}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_\nu}{dt^2}$. Shuning uchun (76.1) quyidagicha yoziladi:

$$m_\nu \frac{d\vec{V}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i \quad \text{yoki} \quad m_\nu \frac{d^2\vec{r}_\nu}{dt^2} = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i .$$

ν ga 1 dan n gacha bo'lgan ketma-ket qiymatlarni qo'yib mexanik sistema harakati differensial tenglamalarining vektor usulda ifodalanishini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i , \\ m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i , \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases} \quad (76.2) \ \text{yoki} \quad \begin{cases} m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases} \quad (76.3)$$

(76.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, mexanik sistema harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ifodalari hosil bo'ladi. Bu differensial tenglamalar soni $3n$ ta bo'ladi.

Shunday qilib, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar berilgan bo'lsa, sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalar harakatini aniqlash uchun vektor usulda $3n$ ta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini yechish, bunda hosil bo'ladigan integral doimiylarini aniqlash kerak. Sistemani tashkil etuvchi nuqtalar soni qancha ko'p bo'lsa, bu differensial tenglamalardan foydalanish shuncha murakkablashadi. Shunga ko'ra, mexanik sistema dinamikasining asosiy masalalarini yechishda (76.3) tenglama ko'rinishidagi differensial tenglamalardan foydalanishga qaraganda, (76.3) da turlicha shakl almashtirishlar bilan hosil qilinadigan dinamikaning umumiy teoremalari va prinsiplarini qo'llash qulay bo'ladi.

77- §. Sistema inersiya markazining harakati haqidagi teorema

Sistema inersiya (massa) markazining unga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlar ta'siridagi harakatini aniqlash uchun sistema harakatining differensial tenglamalaridan foydalanamiz.

(76.3) tenglamalarni hadlab qo'shamiz:

$$\sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i \quad \text{yoki} \quad \sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \vec{R}^e + \vec{R}^i .$$

Ichki kuchlarning xususiyatiga ko'ra $\vec{R}^i = 0$. Shuning uchun

$$\sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \vec{R}^e . \qquad (77.1)$$

(73.5) ga ko'ra, $\qquad M\vec{r}_s = \sum m_v \vec{r}_v$.

Bu ifodadan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2}. \qquad (77.2)$$

(77.2) ga binoan (77.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \vec{R}^e . \qquad (77.3)$$

(77.3) ifodani moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasi (64.2) bilan taqqoslab, massa markazining harakati haqidagi teoremani hosil qilamiz: *sistema massasi inersiya markazida joylashgan deb qabul qilinsa, u markaz tashqi kuchlar bosh vektori ta'sirida xuddi moddiy nuqta kabi harakatlanadi.*

(77.3) ni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak sistema massa markazi harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ifodalari kelib chiqadi:

$$M\frac{d^2x_s}{dt^2} = R_x^e , \quad M\frac{d^2y_s}{dt^2} = R_y^e , \quad M\frac{d^2z_s}{dt^2} = R_z^e . \qquad (77.4)$$

Kinematikadan ma'lumki, ilgarilama harakatdagi jismning holati mazkur jism bitta nuqtasining holati bilan aniqlanar edi. Shuning uchun (77.3) yoki (77.4) tenglamalarni jismning ilgarilama harakati differensial tenglamalari deb atash mumkin.

(77.3) ni tabiiy koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, tabiiy usuldagi massa markazi harakatining differensial tenglamasi kelib chiqadi:

$$M\frac{dV_s}{dt} = R_\tau^e , \quad M\frac{V_s^2}{\rho} = R_n^e . \qquad (77.5)$$

78- §. Inersiya markazi harakatining saqlanish qonuni

Inersiya markazining harakati haqidagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1. Sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo'lsin, ya'ni $\vec{R}^e = 0$. Bu holda (77.3) dan $\vec{V}_S = \overline{\text{const}}$ kelib chiqadi.

Demak, *sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo'lsa, inersiya markazi to'g'ri chiziqli teng o'lchovli harakat qiladi.* Agar boshlang'ich paytda massa markazi tinch holatda bo'lsa, $\vec{V}_S = 0$ dan $\vec{r}_S = \overline{\text{const}}$ hosil bo'ladi; ya'ni inersiya markazi berilgan koordinata sistemasiga nisbatan o'z holatini o'zgartirmaydi.

2. Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi masalan R_x^e nolga teng bo'lsin. U holda (77.4)ning birinchisidan a_{Sx}=0 yoki $V_{Sx} = \dot{x}_S = \text{const}$ hosil bo'ladi.

Demak, *sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, inersiya markazi tezligining shu o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmas ekan.* Xususiy holda $\dot{x}_S = 0$ bo'lsa, inersiya markazining Ox o'q bo'yicha koordinatasi o'zgarmay qoladi, ya'ni $x_S = \text{const}$.

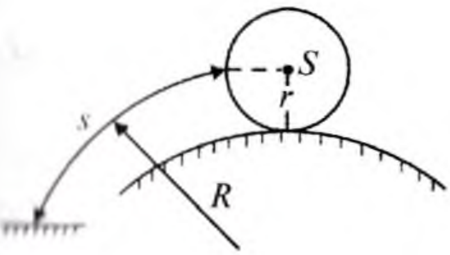
Bu natijalar *sistema inersiya markazi harakatining saqlanish qonuni* deyiladi.

79- §. Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani qo'llab masalalar yechish

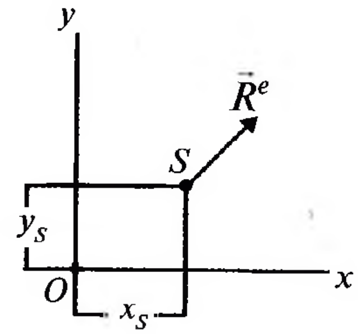
Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani qo'llab masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Sistemaga ta'sir etuvchi hamma kuchlar rasmda tasvirlanadi.
3. Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining tanlab olingan koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi.
4. Sistema inersiya markazining koordinatalari aniqlanib, ulardan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila hisoblanadi.
5. Sistema inersiya markazi harakatining differensial tenglamalari tuziladi.
6. Tuzilgan differensial tenglamaga ko'ra yoki dinamikaning birinchi, yoki ikkinchi masalasi yechilib, noma'lum kinematik parametrlar topiladi.

48-masala. Massasi m = 15 kg bo'lgan g'ildirakning massa markazi S, radiusi r=1,3 m bo'lgan aylana bo'yicha $s = 4t$ qonunga ko'ra harakatlanadi. G'ildirakka ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori aniqlansin (153-rasm).



153-rasm.



154-rasm.

Yechish. Masala shartiga ko'ra g'ildirak massa markazining harakati tabiiy usulda berilgan, ya'ni:

$$s = 4t. \tag{79.1}$$

Massa markazi harakati differensial tenglamasi (77.5) ni tuzamiz:

$$m\frac{dV_S}{dt} = R_\tau^e,\ m\frac{V_S^2}{r} = R_n^e. \tag{79.2}$$

(79.1) dan vaqt bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$V_S = \frac{ds}{dt} = 4,\ a_S^\tau = \frac{dV_S}{dt} = 0. \tag{79.3}$$

(79.3) va masala shartidagi son qiymatni (79.2) ga qo'ysak:

$$R_\tau^e = 0,\ R_n^e = 185\ \text{N}.$$

Natijada $R^e = \sqrt{(R_\tau^e)^2 + (R_n^e)^2}$, $R^e = 185$ N hosil bo'ladi.

49-masala. Massasi m = 10 kg bo'lgan mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e = 3\vec{i} + 6t\vec{j}$. Boshlang'ich paytda sistema inersiya markazi O nuqtada bo'lib, tinch holatda bo'lgan. y_S = 0,8 m bo'lgan vaqtda sistema inersiya markazi tezligining moduli topilsin (154-rasm).

Yechish. Masala shartiga ko'ra sistema Oxy tekisligida harakat qiladi. Shuning uchun sanoq sistemasi 154-rasmdagidek bo'ladi. Ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e$ dan iborat. Sistema harakatining boshlang'ich shartlari quyidagicha:

$$t = 0,\ x_S = 0,\ y_S = 0,\ \dot{x}_S = 0,\ \dot{y}_S = 0.$$

Mexanik sistema inersiya markazi harakatining differensial tenglamasi (77.4) ning birinchi ikkitasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}_S = R_x^e,\ m\ddot{y}_S = R_y^e,$$

bu yerda R_x=3, R_y=6t. Shuning uchun

$$m\ddot{x}_S = 3,\quad m\ddot{y}_S = 6t,$$

bundan $\begin{cases} \ddot{x}_S = \dfrac{3}{m}, \\ \ddot{y}_S = \dfrac{6t}{m} \end{cases}$ kelib chiqadi.

Mazkur differensial tenglamalarni integrallaymiz:

$$\dot{x}_S = \frac{3}{m}t + C_1,\quad x_S = \frac{3t^2}{2m} + C_1 t + C_2;$$

$$\dot{y}_S = \frac{6t^2}{2m} + C_3,\quad y_S = \frac{6t^3}{6m} + C_3 t + C_4.$$

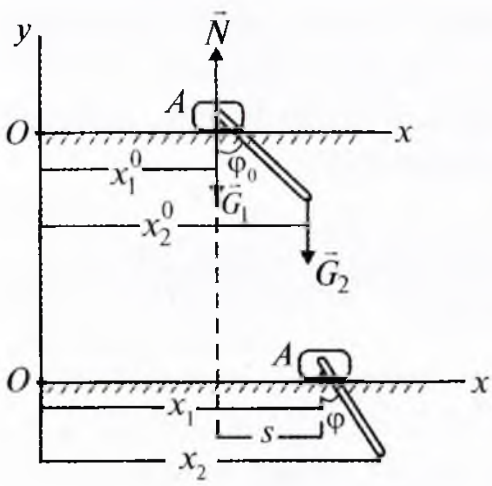
Boshlang'ich shartlarga asosan $C_1=C_2=C_3=C_4=0$ bo'ladi. Natijada

$$\begin{cases} \dot{x}_S = \dfrac{3}{m}t, \\ \dot{y}_S = \dfrac{6t^2}{2m} \end{cases} \quad (79.4) \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_S = \dfrac{3t^2}{2m}, \\ y_S = \dfrac{t^3}{m}. \end{cases} \quad (79.5)$$

(79.5) ning ikkinchisidan $t^3=my_S$ kelib chiqadi. Son qiymatlarni qo'ysak: t=2 sekund. Vaqtning bu qiymatini (79.4) ga qo'yamiz: $\dot{x}_S = 0{,}6,\ \dot{y}_S = 1{,}2$.

Demak, $V_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2}$ yoki $V_S = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}2^2} = 1{,}34$ m/s.

50-masala. Elliptik mayatnik silliq gorizontal tekislik bo'ylab ilgarilama harakat qiluvchi m_1 massali A jism va u bilan AB sterjen orqali bog'langan m_2 massali B yukdan iborat. Sterjen uzunligi l. Boshlang'ich paytda sterjen φ_0 burchakka burilgan bo'lib, boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuborilgan. Sterjenning og'irligi hisobga olinmay, A jismning ko'chishi og'ish burchagi φ orqali aniqlansin (155-rasm).



155-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasini 155-rasmdagidek tanlaymiz. Sistema A jism va B yukdan iborat bo'lib, unga $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ og'irlik kuchlari hamda gorizontal tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$ ta'sir qiladi.

Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar bosh vektorining Ox va Oy o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$R_x^e = 0,\ R_y^e = N - G_1 - G_2.$$

Masala shartida A jism ko‘chishi talab etilgani sababli sistema inersiya markazining absissasini yozib olamiz:

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{79.6}$$

Boshlang‘ich paytda A jism va B yukning koordinatalari mos ravishda x_1^0, $x_2^0 = x_1^0 + l\sin\varphi_0$. Bularni (79.6) ga qo‘yamiz:

$$x_S^0 = \frac{m_1 x_1^0 + m_2 x_1^0 + m_2 l \sin\varphi_0}{m_1 + m_2}. \tag{79.7}$$

Sterjen biror φ burchakka burilganda A jism s masofaga siljisin. Bu holda $x_1 = x_1^0 + s$, $x_2 = x_1^0 + s + l\sin\varphi$ bo‘lib, sistema inersiya markazining absissasi:

$$x_S = \frac{m_1 x_1^0 + m_1 s + m_2 x_1^0 + m_2 s + m_2 l \sin\varphi}{m_1 + m_2}. \tag{79.8}$$

Boshlang‘ich paytda sistema qo‘zg‘almas hamda $R_x^e = 0$ bo‘lgani uchun sistema inersiya markazining absissasi o‘zgarmaydi, ya’ni: $x_s = \text{const}$.

Bundan foydalanib (79.7) bilan (79.8) ni tenglashtiramiz:

$$(m_1 + m_2)s = m_2 l(\sin\varphi_0 - \sin\varphi).$$

Bu tenglikdan $s = \dfrac{m_2 l(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}{m_1 + m_2}$ kelib chiqadi.

Demak, $\sin\varphi_0 > \sin\varphi$ da A jism o‘ng tomonga, $\sin\varphi_0 < \sin\varphi$ da chap tomonga ko‘chadi.

80- §. Kuch impulsi

M moddiy nuqta $\vec{F}$ kuch ta’sirida bo‘lsin.

Kuchning *elementar vaqt oralig‘idagi elementar impulsi deb, kuch vektori bilan shu vaqtning ko‘paytmasiga aytiladi* va u quyidagicha yoziladi:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \tag{80.1}$$

Kuchning biror (0, t) vaqt oralig‘idagi impulsini aniqlash uchun (80.1) ni shu vaqt oralig‘ida integrallaymiz:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt. \tag{80.2}$$

(80.2) ni Dekart koordinata o‘qlariga proyeksiyalasak, kuch impulsi vektorining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari kelib chiqadi:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt. \qquad (80.3)$$

Agar S_x, S_y, S_z ma'lum bo'lsa, kuch to'la impulsining moduli

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \qquad (80.4)$$

formuladan, yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\vec{S}\hat{\ }, \vec{i}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\vec{S}\hat{\ }, \vec{j}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\vec{S}\hat{\ }, \vec{k}) \qquad (80.5)$$

bilan aniqlanadi.

Kuch impulsining birligi SI da Ns (kgm/s) dan iborat.

Kuch impulsi moddiy nuqtaga tashqaridan ta'sir qiluvchi jismlarning biror vaqt oralig'da nuqtaga bergan mexanik harakatini xarakterlaydi.

81- §. Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori

Moddiy nuqta massasi bilan tezlik vektorining ko'paytmasiga moddiy nuqtaning harakat miqdori deyiladi:

$$\vec{q} = m\vec{V}. \qquad (81.1)$$

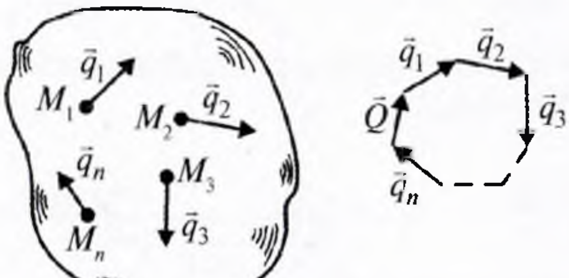
(81.1) tenglamadan ko'rinib turibdiki, moddiy nuqtaning harakat miqdori vektor kattalik bo'lib, u tezlik vektori bo'ylab yo'naladi. Harakat miqdorining o'lchov birligi SI da kgm/s.

Mexanik sistemaning harakat miqdori deb, sistemani tashkil etuvchi nuqtalar harakati miqdorlarining geometrik yig'indisiga aytiladi (156-rasm).

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_\nu = \sum m_\nu \vec{V}_\nu. \qquad (81.2)$$

(81.1) da $m_\nu = \text{const}$, $\vec{V}_\nu = \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt}$ bo'lgani uchun

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}\sum m_\nu \vec{r}_\nu. \qquad (81.3)$$



156-rasm.

(73.5) ga ko'ra,

$$\sum m_\nu \vec{r}_\nu = M\vec{r}_S.$$

Natijada (81.3) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_S) = M\frac{d\vec{r}_S}{dt} \quad \text{yoki}$$

$$\vec{Q} = M\vec{V}_S. \qquad (81.4)$$

Demak, *mexanik sistemaning harakat miqdori sistema massasi bilan inersiya markazi tezligi vektorining ko'paytmasiga teng.*

82- §. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani keltirib chiqarish uchun (76.2) tenglamalarning chap va o'ng tomonlarini hadlab qo'shamiz:

$$\sum m_v \frac{d\vec{V}_v}{dt} = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}\sum m_v \vec{V}_v = \vec{R}^e + \vec{R}^i .$$

Ichki kuchlarning xususiyatiga asosan $\vec{R}^i = 0$. Shuning uchun:

$$\frac{d}{dt}\sum m_v \vec{V}_v = \vec{R}^e . \tag{82.1}$$

(81.2) ga ko'ra (82.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e . \tag{82.2}$$

(82.2) ifoda sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *mexanik sistema harakat miqdorining vaqt bo'yicha birinchi hosilasi mazkur sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektoriga teng.*

(82.2) ning ikki tomonini *dt* ga ko'paytirsak:

$$d\vec{Q} = \vec{R}^e dt \tag{82.3}$$

yoki

$$d\vec{Q} = d\vec{S}^e . \tag{82.4}$$

Demak, sistema harakat miqdorining differensiali unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining elementar impulsiga teng.

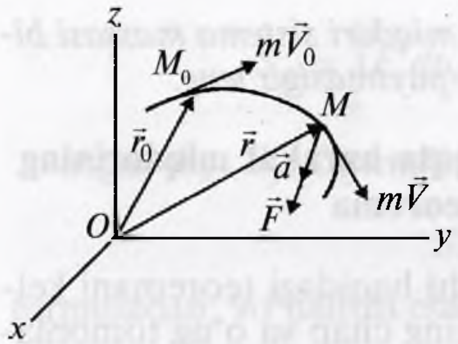
(82.2) ni Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e , \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e , \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e . \tag{82.5}$$

(82.5) dan ko'ramizki, *sistema harakat miqdorining biror o'qdagi proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.*

(82.2) yoki (82.4) ni ma'lum vaqt oralig'ida integrallasak, sistema harakat miqdorining chekli vaqt oralig'ida o'zgarishi haqidagi teoremani yoki impulslar teoremasini hosil qilamiz:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{R}\, dt = \vec{S}^e . \tag{82.6}$$



157-rasm.

Demak, *sistema harakat miqdorining ma'lum vaqt oralig'ida o'zgarishi unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt oralig'idagi impulsiga teng.*

(82.6) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, impulslar teoremasining skalyar ko'rinishi kelib chiqadi:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \tag{82.7}$$

(82.4) va (82.6) ga asosan, moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema quyidagi ko'rinishlarda yoziladi (157-rasm):

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}\,dt = d\vec{S} \tag{82.8}$$

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{S}. \tag{82.9}$$

(82.8) dan ko'ramizki, *moddiy nuqta harakat miqdorining differensiali mazkur nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning elementar impulsiga teng.*

(82.9) ifodani quyidagicha o'qish mumkin: *moddiy nuqta harakati miqdorining ma'lum vaqt oralig'ida o'zgarishi nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning shu vaqt oralig'idagi impulsiga teng.*

(82.9) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi ckalyar ifodalarga ega bo'lamiz:

$$mV_x - mV_{0x} = S_x, \quad mV_y - mV_{0y} = S_y, \quad mV_z - mV_{0z} = S_z. \tag{82.10}$$

83- §. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni

Harakat miqdorining saqlanish qonuni harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teoremaning xususiy holidan iborat. Bu xususiy hollar quyidagicha:

Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning harakat miqdori o'zgarmay qoladi, ya'ni:

$$\vec{R}^e = 0 \text{ da } \quad \vec{Q} = const. \tag{83.1}$$

(82.3) ni integrallash bilan (83.1) ning o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining shu o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmaydi. Masalan,

$$R_x = 0 \text{ da } Q_x = const. \tag{83.2}$$

(83.2) formula (82.5) ning birinchi ifodasidan keltirib chiqariladi.

(83.1) va (83.2) *mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonunini* ifodalaydi.

Moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$a)\ \vec{F} = 0 \text{ da } \vec{q} = m\vec{V} = const,$$

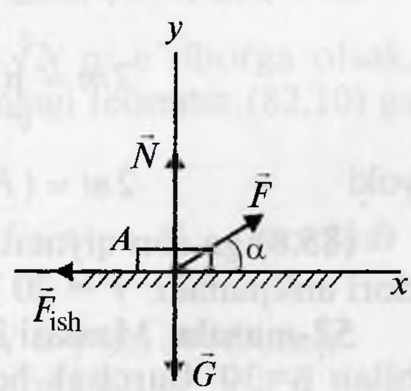
$$b)\ F_x = 0 \text{ da } mV_x = m\dot{x} = const.$$

84-§. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab masalalar yechish

Sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab, masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistema tanlab olinadi.
2. Ta'sir qiluvchi hamda reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
3. Chegara shartlari aniqlanadi.
4. Kuch impulsi hisoblanadi.
5. Harakat miqdori teoremasini ifodalovchi tenglamalar tuziladi.
6. Tuzilgan tenglamalardan kerakli noma'lumlar topiladi.

51-masala. Massasi 10 kg bo'lgan jism o'zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sirida gorizontal tekislikda Ax o'q bo'ylab harakatlanadi (158-rasm). $\vec{F}$ kuchning Ax bilan hosil qilgan burchagi α=30°. A jism tezligini 5 sekundda 2 m/s dan 4 m/s gacha o'zgartiruvchi F kuch aniqlansin. Ishqalanish koeffitsiyenti f = 0,15.



158-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasini 158-rasmdagidek tanlaymiz. A jismni moddiy nuqta deb qaraymiz. Unga og'irlik kuchi $\vec{G}$, gorizontal tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ hamda o'zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sir qiladi.

Masala shartiga ko'ra:

$$t = 0 \text{ da } V_{0x} = 2 \text{ m/s}, V_{0y} = 0, \tag{84.1}$$

$$t = 5 \text{ s da } V_x = 4 \text{ m/s}. \tag{84.2}$$

A jismga ta'sir qiluvchi kuchlar impulslari yig'indisining Ax va Ay o'qlardagi proyeksiyalari (81.3) ga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$S_x = \int_0^5 (F\cos\alpha - F_{ish})dt, \; S_y = \int_0^5 (N + F\sin\alpha - G)dt. \quad (84.3)$$

$F_{ish} = fN$ bo‘lgani uchun (85.3) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$S_x = \int_0^5 (F\cos\alpha - fN)dt, \; S_y = \int_0^5 (N + F\sin\alpha - G)dt. \quad (84.4)$$

Moddiy nuqtaning harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremani (82.10) ko‘rinishda yozamiz:

$$mV_x - mV_{0x} = S_x, \quad mV_y - mV_{0y} = S_y. \quad (84.5)$$

Jism gorizontal tekislik bo‘ylab harakat qilgani sababli V_y=0. Buni e’tiborga olib (84.1), (84.2) va (84.4) ni (84.5) ga qo‘ysak,

$$2m = \int_0^5 (F\cos\alpha - fN)dt, \quad 0 = N + F\sin\alpha - G \quad (84.6)$$

kelib chiqadi.

(84.6) ning ikkinchisidan:

$$N = G - F\sin\alpha = mg - F\sin\alpha. \quad (84.7)$$

(84.7) ni (84.6) ning birinchisiga qo‘yamiz:

$$2m = \int_0^5 (F\cos\alpha - fmg + fF\sin\alpha)dt$$

yoki
$$2m = (F\cos\alpha - fmg + fF\sin\alpha)\cdot 5. \quad (84.8)$$

(85.8) ga son qiymatlarni qo‘ysak, noma’lum $\vec{F}$ kuchning miqdori aniqlanadi: F = 20 N.

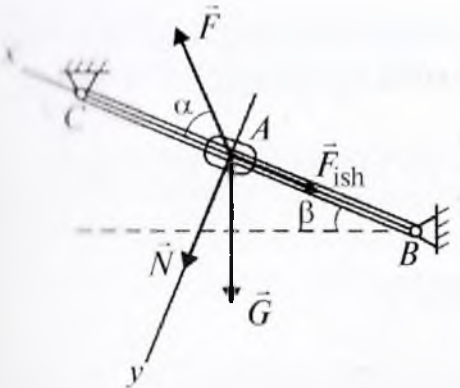
52-masala. Massasi 20 kg bo‘lgan A polzun (159-rasm) gorizont bilan β=30° burchak hosil qiluvchi BC sterjen bo‘ylab F=700 N kuch ta’sirida boshlang‘ich tezliksiz harakatlanadi. $\vec{F}$ kuch sterjen bilan α=45° burchakni tashkil qiladi. Qancha vaqtdan so‘ng polzun tezligi 2 m/s ga yetadi. Ishqalanish koeffitsiyenti 0,2. Sterjen og‘irligi hisobga olinmasin.

Yechish. Sanoq sistemasini 159-rasmdagidek tanlaymiz. Polzunni moddiy nuqta deb qarasak, unga $\vec{F}$ kuch, og‘irlik kuchi $\vec{G}$, sterjenga perpendikular bo‘lib pastga tomon yo‘nalgan sterjenning normal reaksiyasi $\vec{N}$, shuningdek, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta’sir qiladi.

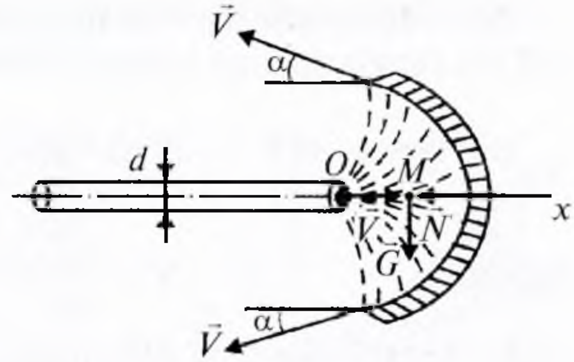
Polzun Ax o‘q bo‘ylab harakat qilgani sababli

$$V_{0y} = 0, \; V_y = 0. \quad (84.9)$$

Masala shartiga ko‘ra:



159-rasm.



160-rasm.

$$t = 0 \text{ da } V_{0x} = 0, \qquad (84.10)$$

$$t = T \text{ da } V_x = 2 \text{ m/s}. \qquad (84.11)$$

Polzunga ta'sir qiluvchi kuchlarning (0, T) vaqt oralig'idagi impulsining Ax va Ay o'qlardagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^T (F\cos\alpha - F_{ish} - G\sin\beta)dt, \\ S_y &= \int_0^T (-F\sin\alpha + N + G\cos\beta)dt. \end{aligned} \qquad (84.12)$$

(84.9)–(84.12) ifodalar hamda $F_{ish} = fN$ ni e'tiborga olsak, polzun harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema (82.10) ga ko'ra quyidagicha yoziladi:

$$2m = \int_0^T (F\cos\alpha - fN - G\sin\beta)dt, \quad 0 = \int_0^T (-F\sin\alpha + N + G\cos\beta)dt.$$

Bundan $2m = (F\cos\alpha - fN - G\sin\beta)T$, $N = F\sin\alpha - G\cos\beta$ kelib chiqadi. Son qiymatlarni qo'ysak: $N = 324{,}96$ N, $T = 0{,}12$ s.

53-masala. Zichligi ρ bo'lgan suv oqimi diametri d bo'lgan trubadan $\vec{V}$ tezlik bilan oqib chiqadi va u silindr shaklida egilgan plastinka sirtiga uriladi. Suv oqimining plastinkaga urilgandan keyingi tezligi ham $\vec{V}$ bo'lib, u gorizontal bilan α burchak tashkil qiladi (160-rasm). Suvning plastinkaga ko'rsatadigan gorizontal bosimi aniqlansin.

Yechish. Sanoq sistemasi qilib gorizontal Ox o'qni olamiz. Suv zarrachasi M ga uning og'irligi $\vec{G}$ hamda plastinka sirti reaksiya kuchining gorizontal tuzuvchisi $\vec{N}$ ta'sir qiladi. (Bunda G_x=0.) dt vaqt ichida truba ko'ndalang kesimidan $m = \rho sVdt$ massali suv oqadi; bunda $s = \pi d^2/4$ truba ko'ndalang kesimining yuzidir.

Suv zarrachasi harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema (82.10) tenglamaning birinchi ifodasiga ko‘ra quyidagicha yoziladi:

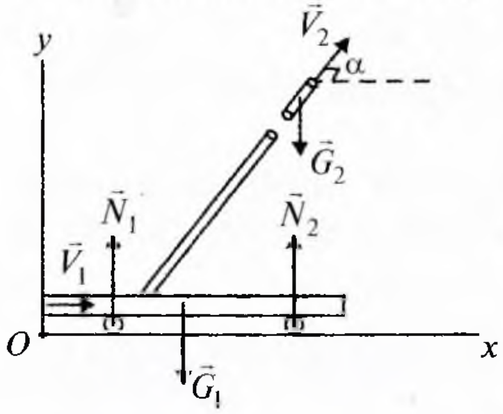
$$mV\cos\alpha - mV = -N\,dt \quad \text{yoki} \quad \frac{\pi d^2\gamma}{4g}V^2(1-\cos\alpha)\,dt = Ndt\,,$$

bundan
$$N = \frac{\pi d^2\gamma}{4g}V^2(1-\cos\alpha)$$

kelib chiqadi. Suvning plastinkaga ko‘rsatadigan gorizontal bosimining miqdori reaksiya kuchi $\vec{N}$ ning miqdoriga teng bo‘lib, yo‘nalishi unga teskaridir.

54-masala. $\vec{V}_1$ tezlik bilan harakatlanuvchi temir yo‘l platformasiga qurol o‘rnatilgan. Qurolning stvoli platforma harakatlanayotgan tomonga qaratilgan bo‘lib, gorizontdan biroz yuqoriga ko‘tarilgan. Quroldan o‘q uzilgandan keyin platformaning tezligi uch marta kamayadi. Agar o‘q stvoldan gorizontga nisbatan α burchak hosil qilib otilib chiqsa, snaryad tezligi $\vec{V}_2$ ni toping.

Snaryadning massasi m_1, qurolli platformaning massasi m_2.



161-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasini 161-rasmdagidek tanlaymiz. Sistema platforma va quroldan iborat. Unga ta’sir qiluvchi kuchlar: $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ og‘irlik kuchlari hamda gorizontal sirtning normal reaksiyalari $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ dan iborat.

Sistemaga ta’sir qiluvchi kuchlar Ox o‘qiga perpendikular bo‘lgani uchun $R_x^e = 0$. Bu holda (83.2) ga ko‘ra sistema harakat miqdorining Ox o‘qdagi proyeksiyasi o‘zgarmas bo‘ladi: $Q_x = Q_{0x}$.

Boshlang‘ich paytdagi sistemaning harakat miqdori:

$$Q_{0x} = (m_1 + m_2)V_1\,. \qquad (84.13)$$

Quroldan o‘q uzilgandan so‘ng sistemaning harakat miqdori quyidagicha bo‘ladi:

$$Q_{0x} = \frac{m_1V_1}{3} + m_2V_2\cos\alpha\,. \qquad (84.14)$$

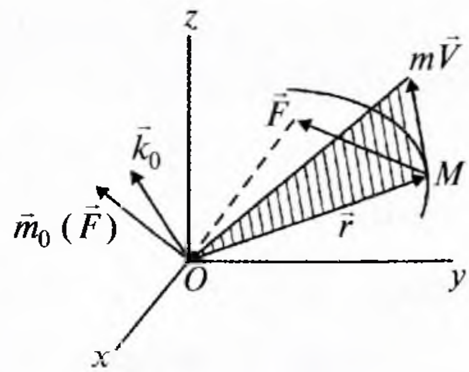
(84.13) bilan (84.14) ni tenglashtirsak,

$$V_2 = \frac{m_2 + \frac{2}{3}m_1}{m_2\cos\alpha},\quad V_1 = \frac{3m_2 + 2m_1}{3m_2\cos\alpha}V_1$$

kelib chiqadi.

85-§. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorining momenti

Mexanika masalalarini yechishda harakat miqdori tushunchasi bilan bir qatorda harakat miqdori momenti yoki kinetik moment tushunchasidan ham foydalaniladi. $\vec{F}$ kuch ta'siridagi M moddiy nuqta $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin (162-rasm).

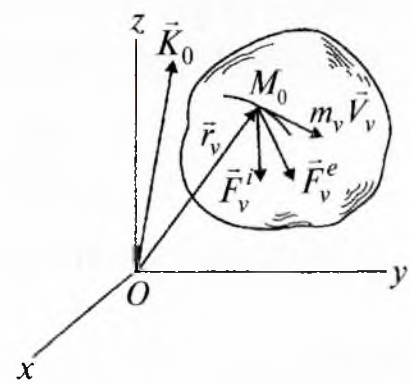


162-rasm.

M nuqtaning biror O markazga nisbatan kinetik momenti deb mazkur nuqta radius-vektori hamda harakat miqdori vektorining vektor ko'paytmasiga aytiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{k}_0 = \vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (85.1)$$

Moddiy nuqta kinetik momenti vektorining yo'nalishi $\vec{r}$ va $\vec{V}$ yotgan tekislikka perpendikular bo'ladi.



163-rasm.

(85.1) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, moddiy nuqta harakat miqdorining o'qqa nisbatan momenti kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} k_x &= m_x(m\vec{V}) = m(yV_z - zV_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ k_y &= m_y(m\vec{V}) = m(zV_x - xV_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ k_z &= m_z(m\vec{V}) = m(xV_y - yV_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (85.2)$$

Kinetik momentning SI ga ko'ra o'lchov birligi kgm^2/s yoki Nms ga teng.

Mexanik sistemaning biror markazga nisbatan kinetik momenti shu sistemani tashkil qiluvchi moddiy nuqtalarning mazkur markazga nisbatan kinetik momentlarining geometrik yig'indisiga teng (163-rasm).

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_v\vec{V}_v) = \sum \vec{r}_v \times m_v\vec{V}_v. \quad (85.3)$$

(85.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum m_x(m_v\vec{V}_v) = \sum m_v(y_v\dot{z}_v - z_v\dot{y}_v), \\ K_y &= \sum m_y(m_v\vec{V}_v) = \sum m_v(z_v\dot{x}_v - x_v\dot{z}_v), \\ K_z &= \sum m_z(m_v\vec{V}_v) = \sum m_v(x_v\dot{y}_v - y_v\dot{x}_v). \end{aligned} \quad (85.4)$$

86- §. Mexanik sistema va moddiy nuqta kinetik momentining o‘zgarishi haqidagi teorema

Sistema kinetik momentining o‘zgarishi haqidagi teoremani keltirib chiqarish uchun (85.3) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} \times m_\nu \vec{V}_\nu + \sum \vec{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\vec{V}_\nu}{dt}, \tag{86.1}$$

bunda $\sum \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} \times m_\nu \vec{V}_\nu = \sum \vec{V}_\nu \times m_\nu \vec{V}_\nu = 0,\ m_\nu \frac{d\vec{V}_\nu}{dt} = m_\nu \vec{a}_\nu$.

Sistema M_ν nuqtasiga qo‘yilgan tashqi va ichki kuchlarning teng ta’sir etuvchilarini mos ravishda $\vec{F}_\nu^e$, $\vec{F}_\nu^i$ (163-rasm) desak, (76.1) ga ko‘ra:

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i.$$

Natijada (86.1) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^e + \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i.$$

Ichki kuchlar xususiyatiga ko‘ra: $\sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i = \vec{M}_0^i = 0$.

Binobarin,

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^e \tag{86.2}$$

yoki

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e. \tag{86.3}$$

(86.3) munosabat sistema kinetik momentining o‘zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *mexanik sistemaning markazga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilasi unga ta’sir qiluvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.*

(86.3) ni Dekart koordinata o‘qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e,\quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e,\quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \tag{86.4}$$

bunda

$$M_x^e = \sum m_x(\vec{F}_\nu^e) = \sum (y_\nu F_{\nu z}^e - z_\nu F_{\nu y}^e), \tag{86.5}$$

$$M_y^e = \sum m_y(\vec{F}_\nu^e) = \sum (z_\nu F_{\nu x}^e - x_\nu F_{\nu z}^e),$$

$$M_z^e = \sum m_z(\vec{F}_\nu^e) = \sum (x_\nu F_{\nu y}^e - y_\nu F_{\nu x}^e).$$

(86.4) ni quyidagicha ta’riflash mumkin: *mexanik sistemaning qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilasi unga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o‘qqa nisbatan momentlarining yig‘indisiga teng.*

(86.3) dan xususiy hol sifatida moddiy nuqta harakat miqdorining markazga nisbatan momenti o'zgarishi haqidagi teoremani hosil qilish mumkin: *moddiy nuqta harakat miqdorining biror markazga nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasi nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng* (162-rasm):

$$\frac{d\left(\vec{m}_0(m\vec{V})\right)}{dt} = \vec{m}(\vec{F}), \tag{86.6}$$

yoki

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{86.7}$$

Agar moddiy nuqta bir necha kuchlar ta'sirida bo'lsa (86.6) yoki (86.7) da $\vec{F}$ ni shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi deb qarash kerak.

(86.7) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, moddiy nuqta harakati miqdorining o'qqa nisbatan momenti o'zgarishi haqidagi teorema kelib chiqadi.

$$\frac{d}{dt}\left(m_x(m\vec{V})\right) = m_x(\vec{F}),\quad \frac{d}{dt}\left(m_y(m\vec{V})\right) = m_y(\vec{F}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_z(m\vec{V})\right) = m_z(\vec{F}) \tag{86.8}$$

yoki

$$\frac{d}{dt}\left(m_x(m\vec{V})\right) = yF_z - zF_y, \tag{86.9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_y(m\vec{V})\right) = zF_x - xF_z,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_z(m\vec{V})\right) = xF_y - yF_x.$$

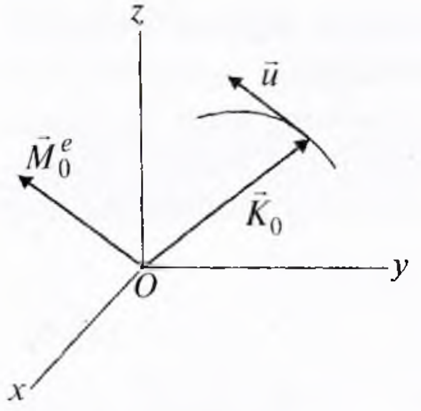
Demak, *moddiy nuqta harakat miqdorining biror o'qqa nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila unga ta'sir qiluvchi kuchning mazkur o'qqa nisbatan momentiga teng.*

87- §. Rezal teoremasi

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani kinetik nuqtayi nazardan ham tushuntirish mumkin.

Kinematikadan ma'lumki, vektordan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila mazkur vekor uchining tezligiga teng. Shuning uchun mexanik sistema kinetik momenti vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilani mazkur vektor uchining tezligi deb qarash mumkin. Bu tezlikni nuqta tezligidan farq qilish uchun $\vec{u}$ deb belgilaymiz (164-rasm):

$$\vec{u} = \frac{d\vec{K}_0}{dt}. \tag{87.1}$$



164-rasm.

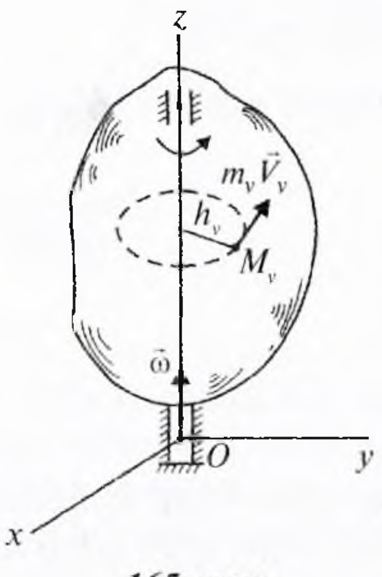
(87.1) tenglikka ko'ra sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{u} = \vec{M}_0^e. \qquad (87.2)$$

(87.2) tenglama Rezal teoremasini ifodalaydi: *mexanik sistemaning biror markazga nisbatan kinetik momenti vektori uchining tezligi sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.*

Rezal teoremasidan foydalanib giroskoplar harakatini tekshirish qulay.

88- §. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati differensial tenglamasi



165-rasm.

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati texnikada ko'p uchraydigan harakatlardan biri. Shuning uchun jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momentini aniqlash va differensial tenglamasini keltirib chiqarish muhim ahamiyatga ega.

Jism qo'zg'almas Oz o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan bo'lsin (165-rasm). Jism M_v nuqtasidan aylanish o'qigacha bo'lgan masofani h_v desak, (85.4) formulaga asosan:

$$K_z = \sum m_z(m_v\vec{V}_v) = \sum m_v V_v h_v. \qquad (88.1)$$

Biroq, $V_v = h_v\omega$. Shuning uchun (88.1) quyidagicha yoziladi:

$$K_z = \sum m_v h_v^2 \omega = \omega \sum m_v h_v^2. \qquad (88.2)$$

(74.1) formulaga ko'ra: $I_z = \sum m_v h_v^2$.

Demak, (88.2) dan

$$K_z = I_z\omega \qquad (88.3)$$

hosil bo'ladi.

(88.3) dan ko'ramizki, *jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti uning mazkur o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan burchak tezligining ko'paytmasiga teng.*

(88.3) ni (86.4) ning uchinchisiga qo'ysak, *qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining differensial tenglamasi* kelib chiqadi:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{yoki} \quad I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \qquad (88.4)$$

(88.4) differensial tenglamani moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasi (64.2) bilan taqqoslab, inersiya momenti aylanma harakatdagi jismning inertlik o'lchovini ifodalanishini ko'ramiz.

89-§. Sistema va moddiy nuqta kinetik momentining saqlanish qonuni

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan quyidagi xususiy hollar kelib chiqadi.

1. *Sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning biror O nuqtaga nisbatan momenti* $\vec{M}_0^e = 0$ *bo'lsa, sistemaning shu markazga nisbatan kinetik momenti* $\vec{K}_0$ *ning miqdori va yo'nalishi o'zgarmas bo'ladi:*

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{r} \times m_\nu \vec{V}_\nu = \overline{const}. \qquad (89.1)$$

(86.3) ifodani $\vec{M}_0^e = 0$ hol uchun integrallab, (89.1) ning o'rinli bo'lishini ta'kidladik.

2. *Sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning biror o'qqa nisbatan momentlari yig'indisi nolga teng bo'lsa, sistemaning shu o'qqa nisbatan kinetik momenti o'zgarmas bo'ladi.*

Masalan,

$$M_x^e = \sum m_x(\vec{F}_\nu^e) = 0 \text{ da } K_x = \sum m_x(m_\nu \vec{V}_\nu) = const. \qquad (89.2)$$

Shunga o'xshash moddiy nuqta kinetik momentining saqlanish qonunini ta'riflash mumkin.

3. *Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning biror markazga nisbatan momenti nolga teng bo'lsa, mazkur nuqta harakati miqdorining shu markazga nisbatan momenti o'zgarmas bo'ladi*, ya'ni:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = 0 \text{ da } \vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V} = \overline{const}. \qquad (89.3)$$

4. *Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning biror o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'lsa, mazkur nuqtaning shu o'qqa nisbatan kinetik momenti o'zgarmas bo'ladi.* Masalan, $\vec{m}_x(\vec{F}) = 0$ da $\vec{m}_x(m\vec{V}) = const.$

5. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism kinetik momentining saqlanish qonuni quyidagicha ta'riflanadi:

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning aylanish o'qiga nisbatan momentlari yig'indisi nolga teng *bo'lsa, jismning mazkur o'qqa nisbatan kinetik momenti o'zgarmas bo'ladi:*

$$M_z^e = 0 \text{ da } K_z = I_z\omega = const \text{ yoki } I_z\omega = I_{0z}\omega_0. \quad (89.4)$$

(89.4) da I_{0z} va ω_0 mos ravishda jismning boshlang'ich paytdagi inersiya momenti va burchak tezligi, I_z va ω esa istalgan t vaqtdagi inersiya momenti va burchak tezligidan iborat.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism kinetik momentining saqlanish qonuniga Jukovskiy skameykasi misol bo'la oladi. Jukovskiy skameykasining gorizontal platformasiga qo'llariga tosh ushlagan kishi turgandan keyin unga boshlang'ich ω_0 burchak tezlik berilsa, (89.4) o'rinli bo'ladi. Chunki kishi, toshlar va platformaning og'irlik kuchlari aylanish o'qiga parallel yo'nalgan yoki tayanch podshipnikda hosil bo'ladigan reaksiya kuchi aylanish o'qini kesib o'tadi. Shuning uchun ularning aylanish o'qiga nisbatan momenti nolga teng.

90- §. Sistema va moddiy nuqta kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab masalalar yechish

Moddiy nuqta yoki sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlanadi.
2. Chegara shartlar aniqlanadi.
3. Ta'sir qiluvchi hamda reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
4. Ta'sir qiluvchi kuchlarning markazga yoki o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisi aniqlanadi.
5. Moddiy nuqta yoki sistemaning markazga yoki o'qqa nisbatan kinetik momenti hisoblanadi.
6. Moddiy nuqta yoki sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi differensial tenglama tuziladi.
7. Tuzilgan differensial tenglama integrallanadi va kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

55-masala. Massasi $m = 1$ kg bo'lgan moddiy nuqta $x=2t$, $y=t^3$, $z=t_4$ qonun bo'yicha harakat qiladi. $t=1$ s bo'lganda moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisining Ox o'qiga nisbatan momenti aniqlansin (x, y, z — metr hisobida).

Yechish. Masalani hal etish uchun (85.2) formulaning birinchisini tuzamiz:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}). \quad (90.1)$$

Masala shartidagi moddiy nuqta harakati qonunidan:

$$\dot{y} = 3t^2, \quad \dot{z} = 4t^3. \quad (90.2)$$

Moddiy nuqta harakati qonunidagi y, z va (90.2) ni (90.1) ga qo'ysak,

$$k_x = mt^6 \tag{90.3}$$

kelib chiqadi. (86.8) ga ko'ra:

$$\frac{dk_x}{dt} = m_x(\vec{F}) \text{ yoki } 6mt^5 = m_x(\vec{F}). \tag{90.4}$$

(90.4) ga son qiymatlarni qo'ysak: $m_x(\vec{F}) = 6$ Nm.

86-masala. M moddiy nuqta $\vec{F}$ ta'sirida harakatlanadi. Bu kuchning ta'sir chizig'i O markazdan o'tadi (166-rasm). Nuqtaning M_1 holatidagi tezlik vektori Oy o'qiga parallel bo'lib, miqdori 2 m/s; M_2 holatidagi tezlik vektori esa kuchning ta'sir chizig'i bilan α=30° burchak tashkil qiladi. Moddiy nuqtaning M_2 holatidagi tezligi V_2 aniqlansin. OM_1/OM_2=3/2. M nuqta og'irligi hisobga olinmasin.

Yechish. M moddiy nuqtaga faqat $\vec{F}$ kuch ta'sir qiladi. Bu nuqta harakati miqdorining O nuqtaga nisbatan momenti o'zgarmas, chunki $m_0(\vec{F}) = 0$.

Natijada, moddiy nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonuniga ko'ra:

$$m_0(m\vec{V}_1) = m_0(m\vec{V}_2). \tag{90.5}$$

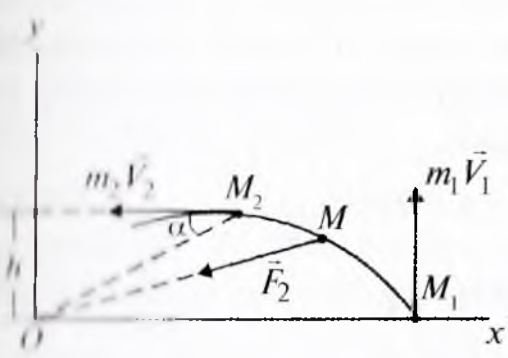
166-rasmdan:

$$m_0(m\vec{V}_1) = mV_1OM_1, \quad m_0(m\vec{V}_2) = mV_2OM_2\sin\alpha. \tag{90.6}$$

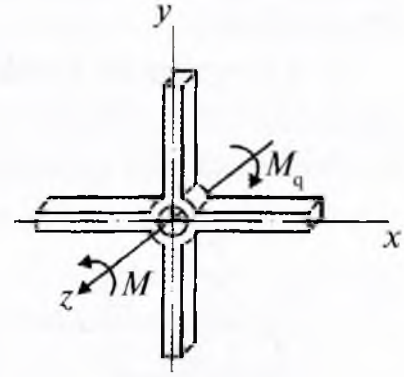
(90.6) ni (90.5) ga qo'yamiz:

$$V_2 = V_1\frac{OM_1}{OM_2\sin\alpha} = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin 30°} = 6 \text{ m/s}.$$

87-masala. Kema parragining aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti I bo'lib, u M moment ta'sirida aylantiriladi. Parrakka ta'sir qiluvchi suv qarshiligining momenti $M_q = k\omega^2$. Bunda k – o'zgarmas miqdor (167-rasm).



166-rasm.



167-rasm.

Dastlabki vaqtda parrak burilish burchagi va burchak tezligi nolga teng. Qancha vaqt (t_1) dan so'ng parrakning burchak tezligi ω_1 bo'lishi topilsin.

Yechish. Parrakning aylanish o'qi deb z o'qni olamiz. Chegara shartlari quyidagicha:

$$t = 0 \text{ da } \omega = 0, \; t = t_1 \text{ da } \omega = \omega_1 . \tag{90.7}$$

Parrakka aylantiruvchi M moment va qarshilik M_q momenti ta'sir qiladi. Natijada:

$$M_z^e = M - k\omega^2 . \tag{90.8}$$

Parrakning kinetik momenti:

$$K_z = I\omega . \tag{90.9}$$

Parrak harakatining differensial tenglamasi quyidagicha:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M - k\omega^2 \text{ yoki } \frac{Id\omega}{M - k\omega^2} = dt . \tag{90.10}$$

$\frac{M}{k} = a^2$ belgilash kiritib va (90.7) dan foydalanib, (90.10) ni integrallaymiz:

$$\frac{I}{2ak}\ln\frac{a+\omega}{a-\omega}\bigg|_0^{\omega_1} = t_1 ,$$

bundan $$t_1 = \frac{I}{2ak}\ln\frac{a+\omega_1}{a-\omega_1}$$ kelib chiqadi.

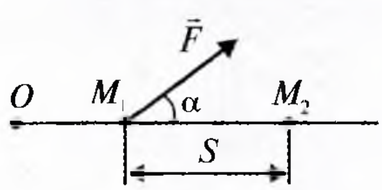
91- §. Ish va quvvat

Sistema (jism, moddiy nuqta)ning biror kuch ta'sirida ko'chishini xarakterlash uchun ish tushunchasi kiritiladi.

Quyida o'zgarmas va o'zgaruvchi kuchning ishi haqida tushuncha beriladi.

1. O'zgarmas kuchning ishi. M nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida M_1 holatdan M_2 holatga o'tsin (168-rasm). O'zgarmas kuchning bu ko'chishdagi ishi quyidagicha aniqlanadi:

$$A = Fs\cos\alpha . \tag{91.1}$$

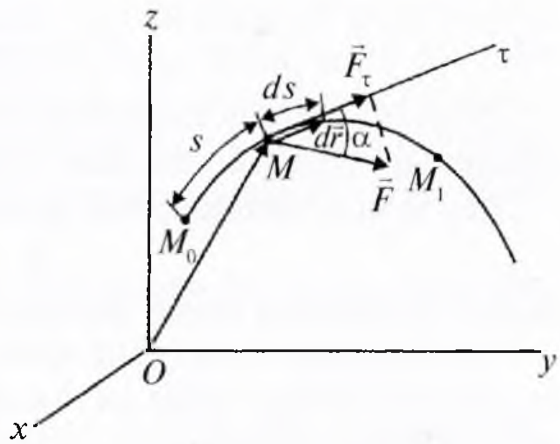


168-rasm.

Agar α=0 bo'lsa $A = Fs$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ da $A = 0$; α o'tkir burchak bo'lsa $A > 0$; α o'tmas burchak bo'lganda $A < 0$ bo'ladi.

Ish birligi qilib SI sistemada Joul (kgm/s) qabul qilingan.

2. O'zgaruvchi kuchning ishi. O'zgaruvchi kuchning ishini hisoblash uchun elementar ish tushunchasi kiritilgan. Elementar ish quyidagicha aniqlanadi (169-rasm):



169-rasm.

$$dA = F_\tau ds\,. \qquad (91.2)$$

(91.2) da F_τ bilan $\vec{F}$ kuchning nuqta trayektoriyasiga o'tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi belgilangan; ds esa nuqtaning elementar ko'chishidan iborat. $F_\tau = F\cos\alpha$ bo'lgani uchun (91.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$dA = F\cos\alpha\, ds\,. \qquad (91.3)$$

(91.3) dan ko'rinib turibdiki, kuchning elementar ishi skalyar miqdor bo'lib, u kuchning nuqta trayektoriyasiga o'tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi bilan moddiy nuqta elementar ko'chishining ko'paytmasiga teng.

F kuchning M_0M_1 chekli oraliqdagi ishini aniqlash uchun (91.2) yoki (91.3) ni shu oraliqda integrallaymiz:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F\cos\alpha\, ds\,. \qquad (91.4)$$

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ifodadan $d\vec{r} = \vec{V}dt$, shuningdek, $ds = |\vec{V}|\,dt$ tengliklarni yoza olamiz. Binobarin, $|d\vec{r}| = ds$ deb (91.3) ni

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{V}dt \qquad (91.5)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Demak, *kuchning elementar ishi kuch vektori bilan nuqta radius-vektori olgan elementar ko'chish vektorining skalyar ko'paytmasidan iborat.*

(91.5) dan foydalanib, elementar ishning analitik ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,, \qquad (91.6)$$

bu yerda F_x, F_y, F_z — kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari; dx, dy, dz — ko'chish vektorining proyeksiyalaridir.

3. Quvvat. Kuchning vaqt birligidagi ishi quvvat deb ataladi.

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (91.7)$$

yoki $$N = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau V . \qquad (91.8)$$

Demak, quvvat kuchning nuqta trayektoriyasiga o‘tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi bilan nuqta tezligining ko‘paytmasiga teng.

(91.5) ni e’tiborga olsak, quvvatning

$$N = \vec{F}\vec{V}$$

skalyar ko‘paytma orqali ifodasini hosil qilamiz.

SI da quvvat birligi qilib vatt olinadi: 1 W = 1 kgm/s^3. Texnikada quvvat birligi qilib ot kuchi qabul qilingan: 1 ot kuchi = = 75 kgk·m ≈ 736 W.

Endi ishni hisoblashga oid misollarni ko‘rib chiqamiz.

1. Og‘irlik kuchining ishi. Og‘irlik kuchi ta’siridagi M nuqta M_0 holatga o‘tgan bo‘lsin (170-rasm).

Og‘irlik kuchi $\vec{G}$ ning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$G_x = 0, \ G_y = 0, \ G_z = -G .$$

(91.6) formulaga asosan og‘irlik kuchining elementar ishi:

$$dA = G_z dz = -G\,dz .$$

Nuqta M_0 dan M_1 holatga kelganda $\vec{G}$ kuchning ishi esa:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-G)\,dz = -G \int_{(M_0)}^{(M_1)} dz = G(z_0 - z_1) ,$$

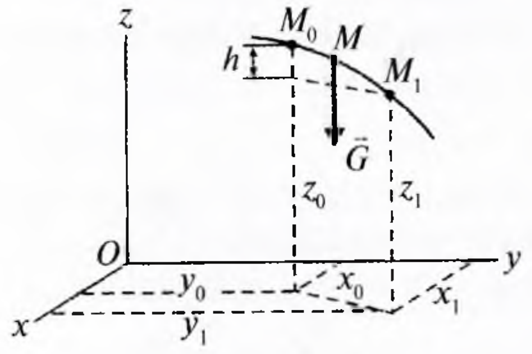
$|z_0 - z_1| = h$ deb belgilasak,

$$A = \begin{cases} Gh, \text{ agar } z_0 > z_1, \\ -Gh, \text{ agar } z_0 < z_1 . \end{cases} \qquad (91.9)$$

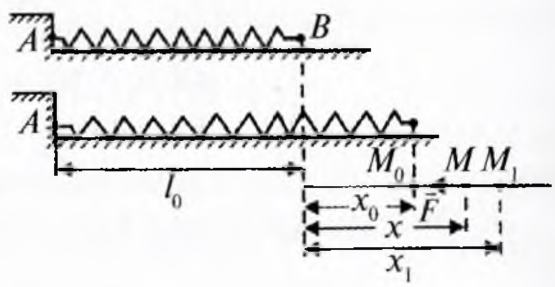
Agar mexanik sistema harakati tekshirilayotgan bo‘lsa, sistema og‘irlik kuchining ishi mazkur sistema og‘irlik kuchi bilan inersiya markazi vertikal ko‘chishining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$A = \pm G h_S ,$$

bu yerda: h_S — inersiya (massa) markazining vertikal ko‘chishi.



170-rasm.



171-rasm.

2. Elastiklik kuchining ishi. A uchi mahkamlangan prujinaning deformatsiyalanmagan holdagi uzunligi l_0 bo'lsin. Sanoq boshi deb prujinaning deformatsiyalanmagan holatidagi B uchini olamiz (171-rasm).

Prujinani biroz cho'zsak, prujinaning elastiklik kuchi F sodir bo'ladi. Bu kuch prujina cho'zilishiga proporsional: $F = |cx|$, bunda x — prujina deformatsiyasi.

Elastiklik kuchining ishi (91.4) formulaga ko'ra quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx)dx = -\int_{x_0}^{x_1} xdx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2). \qquad (91.10)$$

3. Ishqalanish kuchining ishi. Moddiy nuqta g'adir-budur sirt ustida harakatlanayotgan bo'lsin (172-rasm). Ishqalanish koeffitsiyentini f, sirtning normal reaksiyasini $\vec{N}$ desak, ishqalanish kuchining moduli $F_{ish} = fN$ formula bilan aniqlanadi.

Ishqalanish kuchi nuqta ko'chishiga teskari yo'nalganini e'tiborga olib, (91.4) formuladan uning ishini hisoblaymiz:

$$A = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{ish}\, ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fNds. \qquad (91.11)$$

Ishqalanish kuchi o'zgarmas bo'lsa, uning ishi quyidagicha bo'ladi:

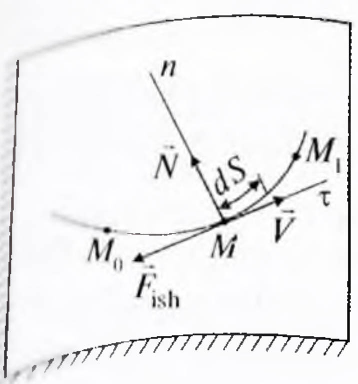
$$A = -F_{ish}\, s. \qquad (91.12)$$

4. Aylanma harakatdagi jismga qo'yilgan kuchning ishi. Oz qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning M nuqtasiga $\vec{F}$ kuch ta'sir qilayotgan bo'lsin (173-rasm). M nuqtadan Oz gacha bo'lgan masofani h bilan belgilaymiz.

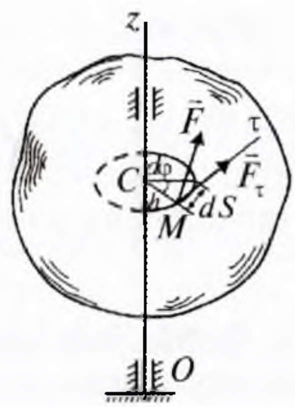
(91.2) formulaga binoan $\vec{F}$ kuchning ds elementar yoyni o'tishdagi elementar ishi

$$dA = F_\tau ds \quad \text{yoki} \quad dA = F_\tau h d\varphi$$

bo'ladi. Ammo, $F_\tau h = m_z(\vec{F}) = M_z$.



172-rasm.



173-rasm.

Shuning uchun, $$dA = M_z d\varphi. \qquad (91.13)$$

Demak, *aylanma harakatdagi jismga qo'yilgan kuchning elementar ishi kuchning aylanish o'qiga nisbatan momenti bilan elementar burilish burchagining ko'paytmasiga teng.*

Jism chekli φ_1 burchakka aylanganidagi kuchning ishi

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi. \qquad (91.14)$$

Agar M_z=*const* bo'lsa (91.14) quyidagicha yoziladi:

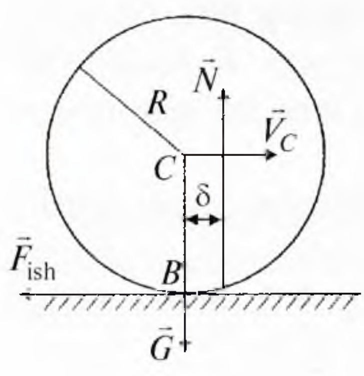
$$A = M_z \varphi_1. \qquad (91.15)$$

Aylanma harakatdagi jismga qo'yilgan kuchning quvvatini aniqlaylik:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega. \qquad (91.16)$$

Demak, *aylanuvchi jismga qo'yilgan kuchning quvvati uning aylanish o'qiga nisbatan momenti bilan jism burchak tezligining ko'paytmasiga teng.*

5. Dumalashdagi ishqalanish kuchining ishi. Radiusi R bo'lgan g'ildirak tekislik (sirt) ustida sirpanmasdan dumalasin. Unga B nuqtada sirpanishga qarshilik qiluvchi $\vec{F}_{ish}$ ishqalanish kuchi ta'sir qiladi. G'ildirak sirpanmasdan dumalagani uchun B nuqtaning ko'chishi ham bo'lmaydi. $\vec{F}_{ish}$ ishqalanish kuchining ishi nolga teng bo'ladi.



174-rasm.

Ma'lumki, sirtlarning deformatsiyalanishi natijasida dumalashdagi ishqalanish momenti hosil bo'ladi (174-rasm);

$$M = \delta N,$$

bu yerda: δ — dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti; N — normal reaksiya kuchi.

G'ildirakning tezliklar oniy markazi B atrofida aylanishini nazarda tutsak, M momentning elementar ishi (91.13) ga ko'ra

$$dA = -\delta N d\varphi \qquad (91.17)$$

formuladan aniqlanadi.

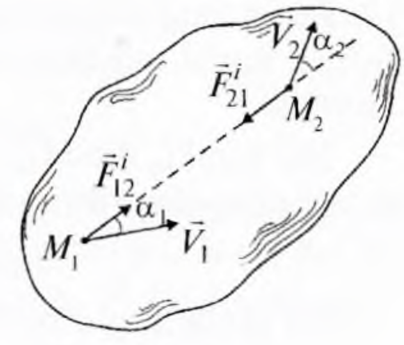
(91.17) da $d\varphi$ bilan g'ildirakning burilish burchagi belgilangan.

Agar M=const bo'lsa, dumalashdagi ishqalanish momentining ishi quyidagicha bo'ladi:

$$A = -\delta N \varphi_1. \qquad (91.18)$$

6. Qattiq jism ichki kuchlarining ishi. Mexanik sistemaga tashqi kuchlardan tashqari ichki kuchlar ham ta'sir qiladi. Agar sistema o'zgaruvchan bo'lsa, ichki kuchlarning ishi nolga teng emas. Bunga snaryadning to'p stvolidan otilib chiqishidagi hosil bo'ladigan hodisani, ya'ni stvolning orqaga tepishini misol qilib keltirish mumkin. Bu hodisada stvol va snaryadga ta'sir qiluvchi kuchning ishi nolga teng bo'lmaydi.

Agar sistema o'zgarmas, ya'ni qattiq jismdan iborat bo'lsa, ichki kuchlar ishlarining yig'indisi nolga teng. Buni quyidagicha isbotlash mumkin.



175-rasm.

Jismning ikkita M_1 va M_2 nuqtasining o'zaro ta'sir kuchlari ichki kuchlar bo'lib, ta'sir aks ta'sir qonuniga ko'ra $\vec{F}_{12}^{i} = -\vec{F}_{21}^{i}$ (175-rasm).

$\vec{F}_{12}^{i}$ va $\vec{F}_{21}^{i}$ kuchlar elementar ishlarining yig'indisi (91.5) ga ko'ra

$$dA_1^i + dA_2^i = \vec{F}_{12}^{i}\,\vec{V}_1\,dt + \vec{F}_{21}^{i}\,\vec{V}_2\,dt = \vec{F}_{12}^{i}\,\vec{V}_1\,dt - \vec{F}_{12}^{i}\,\vec{V}_2\,dt$$

yoki
$$dA_1^i + dA_2^i = F_{12}^{i}\,V_1 \cos\alpha_1\,dt - F_{12}^{i}\,V_2 \cos\alpha_2\,dt =$$

$$= F_{12}^{i}\,(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2)\,dt$$

bo'ladi. Kinematikadan ma'lumki, jism ikki nuqtasi tezliklarining mazkur nuqtalarni tutashtiruvchi o'qdagi proyeksiyalari tengdir:

$$V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2 .$$

Shuning uchun yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dA_1^i + dA_2^i = 0 .$$

Demak, qattiq jism ichki kuchlar elementar ishlarining yig'indisi nolga teng:

$$dA^i = \sum dA_\nu^i = 0 . \qquad (91.19)$$

92- §. Potensialli kuch maydoni. Kuch funksiyasi. Potensialli kuch

Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning biror ko'chishidagi ishi umumiy holda bu ko'chishdagi harakat qonuniga bog'liq bo'ladi. Ammo shunday kuchlar borki (masalan, og'irlik kuchi, elastiklik kuchi), ularning ishi nuqtaning harakat qonuniga bog'liq bo'lmaydi. Bunday kuchlar *potensialli kuchlar* deb ataladi.

Fazoning biror sohasiga kiritilgan moddiy nuqtaga nuqta koordinatalari va vaqt funksiyasidan iborat kuch ta'sir etsa, bunday soha *kuch maydoni* deyiladi. Agar vaqt o'tishi bilan nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmasa, kuch maydoni *statsionar maydon*, kuch vaqtga bog'liq bo'lsa, *nostatsionar maydon* deyiladi.

Kuch maydoniga misol qilib, planetalar yoki Quyoshning tortishish kuchi maydonini, elektr yoki elektromagnit maydonini olish mumkin.

Ma'lumki, moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi $\vec{F}$ kuchning elementar ishi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,. \qquad (92.1)$$

Bu ifodaning o'ng tomoni umumiy holda nuqta koordinatalariga bog'liq funksiyaning to'liq differensiali bo'lmaydi. (92.1) uch had biror $U(x, y, z)$ funksiyaning to'liq differensiali bo'ladigan kuch maydoni potensialli kuch maydoni deb ataladi. Bu holda

$$dA = dU$$

yoki $$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (92.2)$$

bo'ladi.

(92.2) dan: $$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\; F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}\,. \qquad (92.3)$$

(92.3) shartni qanoatlantiruvchi kuch potensialli yoki konservativ kuch, $U = U(x, y, z)$ esa *kuch funksiyasi* deyiladi.

F_x, F_y, F_z ning ko'rinishiga qarab, u kuchning potensialli ekanligini aniqlash uchun (92.3) dan xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},\; \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x},\; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y},$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},\; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z},\; \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}. \qquad (92.4)$$

(92.4) dan $$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},\; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x},\; \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (92.5)$$

kelib chiqadi.

Kuch proyeksiyalari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi (92.5) ning bajarilishi kuch potensialli bo'lishining zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi.

93- §. Potensialli kuch maydonidagi ish. Potensial energiya

Potensialli kuchning ishi haqidagi teoremani ko'rib chiqamiz.

Kuch maydonida harakat qilayotgan moddiy nuqtaning harakatida potensialli kuchning ishi nuqtaning o'tgan yo'liga bog'liq bo'lmasdan, faqat uning boshlang'ich hamda so'nggi holatiga bog'liq bo'ladi.

Teoremani isbotlash uchun $\vec{F}$ kuchning elementar ishi ifodasini quyidagicha yozamiz:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU .$$

Moddiy nuqta boshlang‘ich paytda M_0 da bo‘lib, unga qo‘yilgan kuch funksiyasi U_0 bo‘lsin. Biror vaqtdan so‘ng nuqta M da bo‘lib, unga tegishli kuch funksiyasi U bo‘lsin. Bu holda $\vec{F}$ kuchning ishi

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 , \qquad (93.1)$$

ya’ni, u kuch funksiyasining faqat oxirgi va boshlang‘ich holatiga bog‘liq bo‘ladi.

Kuch potensialli bo‘lgan holda kuch funksiyasi U bilan bir qatorda potensial energiya tushunchasi ham kiritiladi.

Nuqtaning M so‘nggi holatidan M_0 boshlang‘ich holatiga ko‘chishdagi potensialli kuchning ishi *moddiy nuqtaning M holatdagi potensial energiyasi* deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Pi = U_0 - U .$$

Koordinatalar boshi nuqtaning boshlang‘ich holatida olinganda

$$\Pi = -U .$$

Demak, potensial energiya potensial funksiyaning teskari ishorasi bilan olingan qiymatiga teng.

94- §. Moddiy nuqta va mexanik sistemaning kinetik energiyasi

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi mazkur nuqta tezligi kvadrati bilan massasi ko‘paytmasining yarmidan iborat, ya’ni:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 . \qquad (94.1)$$

Sistemani tuzuvchi moddiy nuqtalar kinetik energiyalarining arifmetik yig‘indisiga *sistemaning kinetik energiyasi* deyiladi:

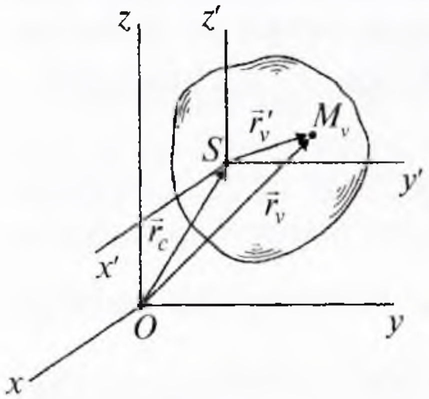
$$T = \frac{1}{2} \sum m_\nu V_\nu^2 . \qquad (94.2)$$

Kinetik energiyaning SI dagi o‘lchov birligi kgm^2/s^2 yoki Nm dan iborat.

Nuqta va sistemaning kinetik energiyasi skalyar miqdor, u tezlik yo‘nalishiga bog‘liq bo‘lmaydi. Sistema tinch holatda turganda uning kinetik energiyasi nolga teng bo‘ladi.

95- §. Kyonig teoremasi

Mexanik sistema qo'zg'almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo'lib, sistemaning ko'chirma harakati ilgarilama harakatdan iborat bo'lsin (176-rasm).



176-rasm.

Bu holda sistemaning absolut harakatini inersiya markazi S bilan birgalikda ilgarilama harakat hamda $Sx'y'z'$ koordinatalar sistemasiga nisbatan aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Tezliklarni qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$\vec{V}_v = \vec{V}_S + \vec{V}_v', \qquad (95.1)$$

bu yerda: $\vec{V}_v'$ – nuqtaning nisbiy tezligi. (95.1) ni (94.2) ga qo'yamiz:

$$T = \sum \frac{m_v V_S^2}{2} + \sum m_v \vec{V}_S \vec{V}_v' + \sum \frac{m_v \vec{V}_v'^2}{2}$$

yoki $$T = \frac{V_S^2}{2} \sum m_v + \vec{V}_S \sum m_v \vec{V}_v' + \frac{1}{2} \sum m_v V_v'^2 ,$$

bu tenglikda $\sum m_v = M$ sistema massasini, $\frac{1}{2} \sum m_v V_v'^2 = T_S'$ esa sistemaning inersiya markaziga nisbatan nisbiy harakati kinetik energiyasini ifodalaydi.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining boshi inersiya markazida joylashgani sababli

$$\sum m_v \vec{r}_v' = M \vec{r}_S' = 0, \text{ binobarin } \sum m_v \vec{V}_v' = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Natijada: $$T = \frac{1}{2} M V_S^2 + T_S'. \qquad (95.2)$$

(95.2) tenglik Kyonig teoremasini ifodalaydi: *murakkab harakatdagi sistemaning kinetik energiyasi massasi inersiya markazida joylashgan deb olinuvchi sistema kinetik energiyasi bilan sistemaning inersiya markaziga nisbatan qilgan nisbiy harakati kinetik energiyasining yig'indisiga teng.*

96- §. Qattiq jismning kinetik energiyasi

Jismning ilgarilama, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma va tekis parallel harakatida uning kinetik energiyasini hisoblash formulalarini aniqlaymiz.

1. **Ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi.** Ilgarilama harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari bir xilda bo'lgani uchun $V_v = V_S$. Shunga binoan, (94.2) quyidagicha yoziladi:

$$T_{il} = \sum \frac{m_v V_S^2}{2} = \frac{1}{2} M V_S^2 . \qquad (96.1)$$

Demak, *ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi mazkur jism massasini uning inersiya markazi tezligi kvadratiga ko'paytirilganining yarmiga teng.*

2. **Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning kinetik energiyasi.** Jism biror Oz o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylansa, uning har bir nuqtasining tezligini

$$V_v = \omega h_v \qquad (96.2)$$

formula bilan aniqlash mumkin. (96.2) tenglamada h_v bilan har bir nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan eng qisqa masofa belgilangan.

(96.2) ni (94.2) ga qo'yamiz:

$$T_{ay} = \sum \frac{m_v \omega h_v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_v h_v^2 ,$$

bundagi $\sum m_v h_v^2 = I_z$ jismning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentini ifodalaydi. Shunday qilib,

$$T_{ay} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 . \qquad (96.3)$$

(96.3) dan ko'rinib turibdiki, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jism kinetik energiyasi uning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentini burchak tezligi kvadratiga ko'paytirilganining yarmiga teng.*

3. **Tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi.** Tekis parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasini Kyonig teoremasiga asoslanib hisoblash mumkin. Bu holda nisbiy harakat inersiya markazi atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'lgani uchun

$$T_S' = I_{Sz} \frac{\omega^2}{2} ,$$

bunda I_{Sz} — jismning harakat tekisligiga perpendikular bo'lgan va S inersiya markazidan o'tuvchi z o'qqa nisbatan inersiya momenti.

Natijada (95.2) formuladan

$$T_{t.p} = \frac{1}{2} M V_S^2 + \frac{1}{2} I_{Sz} \omega^2 \qquad (96.4)$$

hosil bo'ladi.

Demak, *tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi massasi inersiya markazida deb olingan jismning ilgarilama harakatdagi kinetik energiyasi bilan inersiya markazidan o'tuvchi o'q atrofidagi aylanma harakati kinetik energiyasining yig'indisiga teng.*

97- §. Sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema

Mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teoremani keltirib chiqarish uchun sistema har bir M_ν nuqtasi uchun yozilgan dinamikaning asosiy tenglamasi (77.1) ni o‘qqa proyeksiyalaymiz:

$$m_\nu a_{\nu\tau} = F^e_{\nu\tau} + F^i_{\nu\tau}, \quad \nu = (1, n) . \tag{97.1}$$

Urinma tezlanish $a_{\nu\tau}$ ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_{\nu\tau} = \frac{dV_\nu}{dt} = \frac{dV_\nu}{ds_\nu} \cdot \frac{ds_\nu}{dt} = V_\nu \cdot \frac{dV_\nu}{ds_\nu} . \tag{97.2}$$

(97.2) ni (97.1) ga qo‘ysak,

$$m_\nu V_\nu dV_\nu = F^e_{\nu\tau} ds_\nu + F^i_{\nu\tau} ds_\nu, \quad (\nu = 1, n)$$

yoki
$$d\left(\frac{m_\nu V_\nu^2}{2}\right) = dA(\vec{F}^e_\nu) + dA(\vec{F}^i_\nu), \quad (\nu = 1, n) \tag{97.3}$$

hosil bo‘ladi.

(97.3) sistemani hadlab qo‘shamiz:

$$d\sum \frac{m_\nu V_\nu^2}{2} = \sum dA(\vec{F}^e_\nu) + \sum dA(\vec{F}^i_\nu) . \tag{97.4}$$

(97.4) tenglikdagi

$$\sum dA(\vec{F}^e_\nu) = dA^e, \quad \sum dA(\vec{F}^i_\nu) = dA^i$$

mos ravishda, sistemaga qo‘yilgan tashqi va ichki kuchlar elementar ishlarining yig‘indisini ifodalaydi.

Natijada
$$dT = dA^e + dA^i . \tag{97.5}$$

(97.5) dan ko‘ramizki, *sistema kinetik energiyasining differensiali unga ta’sir qiluvchi barcha ichki va tashqi kuchlar elementar ishlarining yig‘indisiga teng.*

(97.5) ni biror chekli oraliqda integrallasak, sistema kinetik energiyasining shu oraliqda o‘zgarishi haqidagi teorema kelib chiqadi:

$$T - T_0 = A^e + A^i . \tag{97.6}$$

Demak, *sistema kinetik energiyasining biror chekli oraliqda o‘zgarishi unga ta’sir etuvchi barcha ichki va tashqi kuchlarning shu oraliqdagi ishlarining yig‘indisiga teng.*

O‘zgarmas mexanik sistema va absolut qattiq jism ichki kuchlar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lib, (97.5) va (97.6) quyidagicha yoziladi:

$$dT = dA^e, \quad T - T_0 = dA^e . \tag{97.7}$$

(97.5) tenglikning har ikki tomonini dt ga bo'lib,

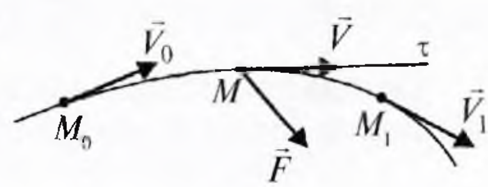
$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \qquad (97.8)$$

ni hosil qilamiz.

Demak, *sistema kinetik energiyasining vaqt bo'yicha birinchi hosilasi mazkur sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlar quvvatlarining yig'indisiga teng.*

98- §. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Massasi m bo'lgan erkin M nuqta F kuch ta'sirida harakatlansin (177-rasm).



177-rasm.

Bu holda (97.7) quyidagicha yoziladi:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F_\tau ds = dA\,. \qquad (98.1)$$

(98.1) dan ko'rinib turibdiki, moddiy nuqta kinetik energiyasining differensiali ta'sir qiluvchi kuchning elementar ishiga teng.

Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning M_0M_1 ko'chishdagi ishi bilan kinetik energiyasi orasidagi munosabat

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = A \qquad (98.2)$$

ko'rinishda yoziladi. Demak, *moddiy nuqta kinetik energiyasining biror chekli oraliqdagi o'zgarishi unga ta'sir etuvchi kuchning shu oraliqdagi ishiga teng.*

(97.8) formulani moddiy nuqta uchun quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = N\,. \qquad (98.3)$$

99- §. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni

Mexanik sistema potensialli kuch maydonida harakatlansin. Bu holda sistemaga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlar ishlarining yig'indisi $A^e + A^i = \Pi_0 - \Pi$ bo'lib, sistema kinetik energiyasining o'zgarishini ifodalovchi (97.6) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{yoki} \quad T + \Pi = T_0 + \Pi_0 \qquad (99.1)$$

Bunda Π_0, Π lar bilan mos ravishda, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning boshlang'ich va istalgan paytga mos kelgan potensial energiyalari belgilangan.

Sistema potensial energiyasi bilan kinetik energiyasining yig'indisi *sistemaning mexanik energiyasi* deb ataladi.

(99.1) dan ko'ramizki, *potensialli kuch maydonida harakatlanuvchi sistema mexanik energiyasi o'zgarmas ekan. Bu mexanik energiyaning saqlanish qonuni* deyiladi.

Moddiy nuqta mexanik energiyasining saqlanish qonuni quyidagicha:

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0. \qquad (99.2)$$

Demak, potensialli kuch maydonida harakatlanayotgan moddiy nuqtaning mexanik energiyasi o'zgarmas miqdordir.

100- §. Moddiy nuqta va mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab masalalar yechish

Kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llab masalalar yechish quyidagi tartibda bajariladi:

1. Moddiy nuqta yoki mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.
2. Moddiy nuqta yoki sistemaning ko'chishida unga ta'sir qilayotgan kuchlarning ishlari yig'indisi topiladi.
3. Moddiy nuqta yoki sistemaning boshlang'ich va oxirgi vaziyatdagi kinetik energiyalari hisoblanadi.
4. Masalaning qo'yilishiga qarab (97.6)–(99.2) formulalarning biri tuziladi va kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

58-masala. Massasi m=0, 5 kg bo'lgan moddiy nuqta Yer sirtidan V_0 m/s boshlang'ich tezlik bilan otilgan. Uning M holatidagi tezligi V=12 m/s. Mazkur nuqtaning M_0 holatdan M holatga ko'chishidagi og'irlik kuchining ishi aniqlansin (178-rasm).

Yechish. Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch faqat og'irlik kuchi $\vec{G}$ dan iborat. Uning ishi (98.2) ga ko'ra:

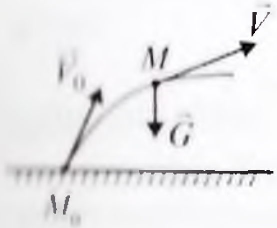
$$A = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak,

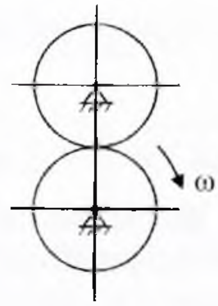
$$A = \frac{0{,}5 \cdot 144}{2} - \frac{0{,}5 \cdot 400}{2} = 36 - 100 = -64 \quad \text{J}$$

kelib chiqadi.

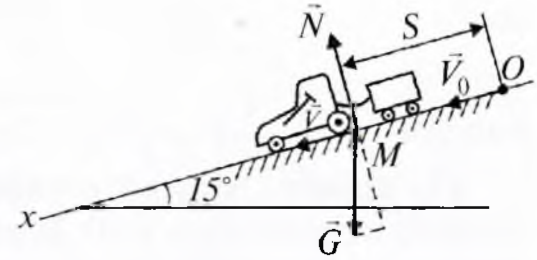
59-masala. Massalari m=1 kg bo'lgan ikkita bir xil tishli g'ildiraklardan tashkil topgan sistema kinetik energiyasi topilsin (179-rasm).



178-rasm.



179-rasm.



180-rasm.

G'ildiraklar ω=10 rad/s burchak tezligi bilan aylanadi. Har bir g'ildirakning aylanish o'qiga nisbatan inersiya radiusi ρ_i=0,2 m.

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaning kinetik energiyasi (94.2) ga ko'ra:

$$T_{\text{sis}} = T_1 + T_2 .$$

G'ildiraklar bir xil bo'lgani uchun $T_1 = T_2 = T$ deb olamiz.

(96.3) ga asosan:

$$T_{\text{sis}} = 2T = 2 \cdot \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

bu yerda $I = m\rho_i^2$.

Natijada $$T_{\text{sis}} = m\omega^2 \rho_i^2 .$$

Son qiymatlarni qo'ysak, T_{sis}= 4 kgm^2/s^2 hosil bo'ladi.

60-masala. Yukli arava bilan birgalikdagi og'irligi G bo'lgan DT-14 traktori qiya tekislikda harakat qilmoqda. Qiya tekislik gorizont bilan 15° burchak hosil qiladi (180-rasm). Traktorning boshlang'ich tezligi V_0=8,3 m/s. Traktor qiya tekislik bo'ylab s = 5 m masofani o'tganda qanday tezlikka ega bo'lishi topilsin.

Arava va traktor bilan tekislik orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin.

Yechish. Traktorning harakat yo'nalishini Ox o'qi bo'yicha olamiz (180-rasm). Traktorga og'irlik kuchi $\vec{G}$, normal reaksiya $\vec{N}$ ta'sir qiladi. Bu kuchlarning harakat yo'nalishiga proyeksiyasi:

$$G_x = G\cos 75°, \quad N_x = 0 .$$

Traktorga ta'sir etuvchi kuchlar ishlarining yig'indisi quyidagicha bo'ladi:

$$A = A(\vec{G}) + A(\vec{N}) = G\cos 75° \cdot s .$$

Traktor tezligini topish uchun moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremadan foydalanamiz:

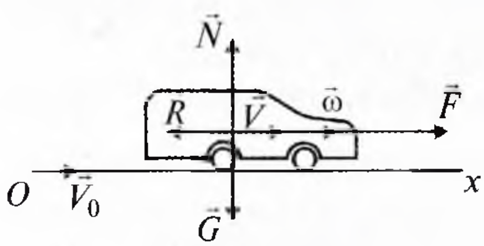
$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A$$

yoki $$\frac{G}{2g}V^2 - \frac{G}{2g}V_0^2 = G\cos 75^\circ \cdot s,$$

bundan $V = \sqrt{V_0^2 + 2g\cos 75^\circ} = 9{,}7$ m/s kelib chiqadi.

61- masala. Massasi m=4800 kg bo'lgan avtomobil yo'lning gorizontal uchastkasida a=0,28 m/s^2 tezlanish bilan harakatlanmoqda. Avtomobil harakatiga qarshilik qiluvchi kuch R=1,28 kN.

t=10 sekunddagi avtomobil tortish kuchining quvvati topilsin. Boshlang'ich paytda avtomobil tezligi V_0=12 m/s (181-rasm).



181-rasm.

Yechish. Avtomobilga ta'sir etuvchi kuchlar og'irlik kuchi $\vec{G}$, gorizontal tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$, tortish kuchi $\vec{F}$ hamda qarshilik kuchi $\vec{R}$ dan iborat. Masalani yechish uchun (98.3) formuladan foydalanamiz. U quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = N(\vec{F}) + N(\vec{N}) + N(\vec{R}) + N(\vec{G}), \qquad (100.1)$$

bunda $$N(\vec{N}) = 0,\ N(\vec{R}) = RV,\ N(\vec{G}) = 0. \qquad (100.2)$$

(100.1) tenglikning chap tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = mVa. \qquad (100.3)$$

(100.2) va (100.3) ni (100.1) ga qo'ysak:

$$mVa = N(\vec{F}) - RV.$$

Bundan $N(\vec{F}) = (ma + R)V$ kelib chiqadi.

Avtomobil tekis tezlanuvchi harakatda bo'lgani uchun $V = V_0 + at$.

Natijada $N(\vec{F}) = (ma + R)\cdot(V_0 + at)$.

Bu ifodaga son qiymatlarni qo'ysak, $N(\vec{F}) = 38{,}8$ kW kelib chiqadi.

62- masala. Og'irligi G_A bo'lgan A katok hamda G_B og'irlikdagi B yuk bir-biri bilan D blok orqali o'tgan cho'zilmaydigan va og'irligi hisobga olinmaydigan arqon vositasida tutashtirilgan. B yuk tezligi V bo'lganda sistemaning kinetik energiyasi aniqlansin. Katok va blok bir jinsli disk deb hisoblansin (182-rasm). Blok og'irligi G_0.

Yechish. Sistema A katok, B yuk va D blokdan iborat. Ularning kinetik energiyalarini mos ravishda T_A, T_B, T_D deb belgilaymiz.

Bu holda sistemaning kinetik energiyasi

$$T = T_A + T_B + T_D \qquad (100.4)$$

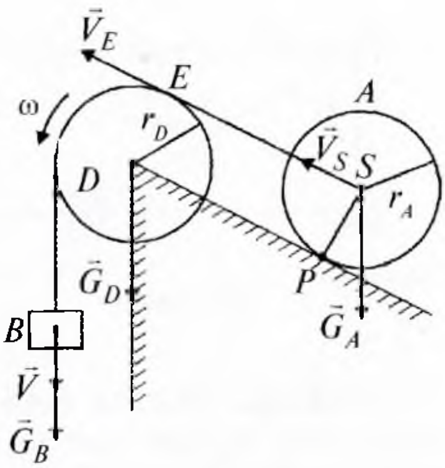
bo'ladi.

S nuqta, D blok hamda B yuk arqon yordamida tutashtirilgan. Shuning uchun

$$V_S = V_E = V, \ \omega_A r_A = \omega_D r_D = V$$

bo'ladi. Bundan

$$\omega_A = \frac{V}{r_A}, \ \omega_D = \frac{V}{r_D} \qquad (100.5)$$



182-rasm.

kelib chiqadi. (100.5) da ω_A — A katokning, ω_D — D blok burchak tezligini ifodalaydi.

A katok tekis parallel harakatda bo'lgani uchun uning kinetik energiyasi quyidagicha:

$$T_A = \frac{1}{2}\frac{G_A}{g}V_S^2 + \frac{1}{2}I_S\omega_A^2. \qquad (100.6)$$

Bunda

$$I_S = \frac{G_A}{2g}r_A^2. \qquad (100.7)$$

(100.5) va (100.7) ni (100.6) ga qo'ysak:

$$T_A = \frac{3}{4}\frac{G_A}{2g}V^2. \qquad (100.8)$$

B yuk ilgarilama harakat qiladi. Uning kinetik energiyasi:

$$T_B = \frac{G_B}{2g}V^2. \qquad (100.9)$$

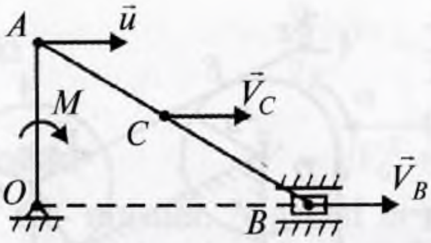
D blok aylanma harakatda bo'lgani sababli uning kinetik energiyasi:

$$T_D = \frac{1}{2}I_D\omega_D^2 \ \text{yoki} \ T_D = \frac{G_D}{4g}V^2. \qquad (100.10)$$

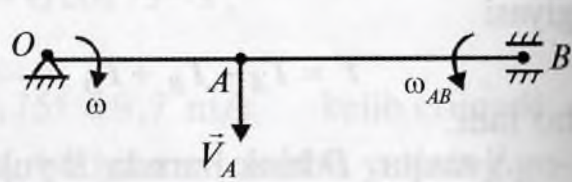
(100.8)–(100.10) larni (100.4) ga qo'ysak, sistemaning kinetik energiyasi kelib chiqadi:

$$T = \frac{V^2}{4g}(3G_A + 2G_B + G_D).$$

63-masala. Gorizontal tekislikda joylashgan krivoship-shatunli mexanizm OA krivoship va AB sterjendan iborat. Krivoship massasi m_1, shatun massasi m_2. Boshlang'ich paytda $\angle BOA=90°$ bo'lib, A nuqta tezligi u. Krivoshipga aylantiruvchi moment M qo'yilgan. $\angle BOA=90°$ bo'lgan paytdagi A nuqta tezligi aniqlansin. Krivoship va shatun bir jinsli sterjen deb hisoblansin. Ishqalanish va polzun massasi hisobga olinmasin (183-rasm).



183-rasm.



184-rasm.

Yechish. Sistema *OA* krivoship va *AB* shatundan iborat. Masalani yechish uchun sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning integral ko'rinishidan foydalanamiz:

$$T - T_0 = \sum A_v^e \ . \qquad (100.11)$$

Mexanizm *A*, *B* va *C* nuqtalari tezliklarining yo'nalishi 183-rasmdagidek bo'ladi. $\angle BOA$=90° bo'lganda *AB* shatun tezliklarining oniy markazi cheksizda bo'ladi.

Demak, tekis parallel harakat nazariyasiga ko'ra *AB* shatunning burchak tezligi ω_{AB}=0. Shuning uchun boshlang'ich paytda

$$V_A = V_B = V_C = u$$

bo'lib, sistema kinetik energiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2 .$$

$\omega = \frac{u}{l}$, $I_0 = \frac{1}{3} m_1 l^2$ ($l = OA$) bo'lgani uchun

$$T_0 = \frac{1}{6} u^2 (m_1 + 3m_2) \qquad (100.12)$$

bo'ladi.

Aylantiruvchi *M* moment ta'sirida *OA* krivoship 90° burilib, $\angle BOA$=90° bo'ladi. Bu holda aylantiruvchi momentning ishi (184-rasm):

$$A = M \frac{\pi}{2}, \qquad (100.13)$$

kinetik energiya esa $T = T_{OA} + T_{AB} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_{AB}^2$ bo'ladi.

Bu yerda $I_0 = \frac{1}{3} m_1 OA^2$, $I_B = \frac{1}{3} m_2 AB^2$, $\omega = \frac{V_A}{OA}$, $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB}$.

Natijada

$$T = \frac{1}{6} m_1 V_A^2 + \frac{1}{6} m_2 V_A^2 \quad \text{yoki} \quad T = \frac{1}{6}(m_1 + m_2) V_A^2 \quad (100.14)$$

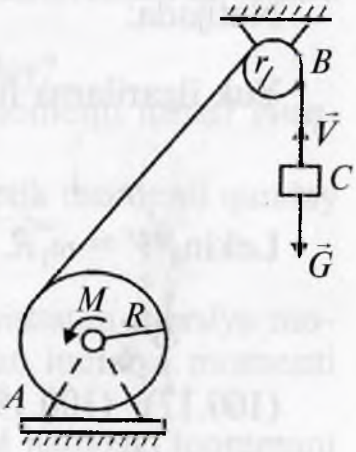
hosil bo'ladi.

(100.12), (100.13) va (100.14) ni (100.11) ga qo'ysak,

$$V_A = \sqrt{\frac{3\pi M + u^2(m_1 + 3m_2)}{m_1 + m_2}}$$

kelib chiqadi.

64-masala. Elektr chig'ir og'irligi G bo'lgan C yukni ko'taradi. Elektr motor M o'zgarmas moment ta'sirida A barabanni harakatga keltiradi. A baraban va B blokning aylanish o'qlariga nisbatan inersiya momentlari tegishlicha I_1 va I_2, baraban radiusi R va blok radiusi r berilgan (185-rasm) (uzunlik metr, vaqt sekund hisobida). Barabanning burchak tezlanishi aniqlansin.



185-rasm.

Yechish. Tekshiralayotgan sistemaga baraban, yuk va blokning og'irlik kuchi, tayanch reaksiyasi, shuningdek o'zgarmas moment ta'sir qiladi. Masalani yechish uchun sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishi (97.8) dan foydalanamiz:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i. \qquad (*)$$

Biz tekshirayotgan masala uchun tros reaksiya kuchi hamda boshqa ichki kuchlar quvvatining yig'indisi nolga teng: $N^i = 0$.

Baraban va blok og'irlik kuchining, shuningdek tayanch reaksiyasining quvvati nolga teng, chunki bu kuchlarning qo'yilish nuqtalari qo'zg'almas. Yuk og'irlik kuchining quvvati:

$$N_1 = -GV = -GR\omega_1,$$

(bunda ω_1 – barabanning burchak tezligi), aylantiruvchi moment quvvati:

$$N_2 = M\omega_1.$$

Natijada:
$$N^e = -GR\omega_1 + M\omega_1 \qquad (100.15)$$

Sistemaning kinetik energiyasi:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (100.16)$$

bunda: T_1, T_2 va T_3 – mos ravishda baraban, blok hamda yukning kinetik energiyasi. Baraban va blok aylanma harakatda bo'lgani sababli, ularning kinetik energiyasi

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2. \qquad (100.17)$$

(100.17) ifodada blok burchak tezligi ω_2 bilan belgilangan.

Tros hamma nuqtalari tezliklarining miqdori tengligidan foydalanib, ω_2 va ω_1 orasidagi bog'lanishni hosil qilamiz:

$$\omega_2 = \frac{R\omega_1}{r}.$$

Natijada:
$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{R^2}{r^2} \omega_1^2. \quad (100.18)$$

Yuk ilgarilama harakat qilgani uchun uning kinetik energiyasi:

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} V^2.$$

Lekin, $V = \omega_1 R$. Shunga ko'ra

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega_1^2. \quad (100.19)$$

(100.17)–(100.19) ni (100.16) ga qo'yamiz:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \frac{R^2}{r^2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega_1^2. \quad (100.20)$$

(100.15) va (100.20) ni (*) ga qo'yamiz:

$$\left(I_1 + I_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{G}{g} \right) \frac{d\omega_1}{dt} = M - GR,$$

bundan
$$\varepsilon_1 = \frac{(M - GR) r^2 g}{(I_1 r^2 + I_2 R^2) g + GR^2 r^2}$$
kelib chiqadi.

? *Nazorat savollari*

1. Mexanik sistema dinamikasining asosiy tenglamasi qanday?
2. Sistema dinamikasida ichki va tashqi kuchlar qanday ifodalanadi?
3. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamasini Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday?
4. Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani ta'riflang va matematik ifodasini yozing.
5. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasi qanday bo'ladi?
6. Qanday shart bajarilganda moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni o'rinli bo'ladi?
7. Mexanik sistema harakat miqdori (kinetik) momentini hisoblash formulasini yozing.
8. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni qanday bo'ladi?
9. Sistema harakat miqdori teoremasining integral ifodasini yozing.
10. Ilgarilanma harakatdagi jism kinetik energiyasini hisoblash formulasini yozing.
11. Aylanma harakatdagi jism kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?

12. Sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teoremaning integral ko‘rinishini yozing.
13. Tekis parallel harakatdagi jism kinetik energiyasi formulasini yozing.
14. Sistema kinetik energiyasi teoremasining differensial ifodasini yozing.
15. Qattiq jism kinetik energiyasi teoremasining integral ko‘rinishini yozing.
16. Qattiq jism kinetik energiyasi teoremasining differensial ko‘rinishi qanday yoziladi?
17. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni qanday?
18. Jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momenti nima? Nuqtaga nisbatan inersiya momenti-chi?
19. Qattiq jismning aylanish o‘qiga nisbatan kinetik momenti qanday ifodalanadi?
20. Inersiya radiusi nima?
21. Qattiq jismning uchta koordinata o‘qlariga nisbatan inersiya momenti bilan shu koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti orasida qanday bog‘lanish bor?
22. Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremani ta’riflang.
23. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasi qanday bo‘ladi?
24. Moddiy nuqta kinetik energiyasi teoremasining differensial va integral ko‘rinishini yozing.

XV BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

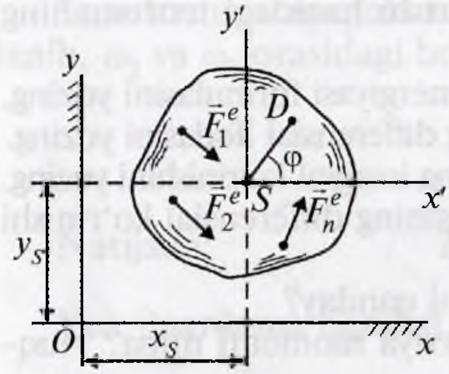
101- §. Qattiq jism tekis parallel harakatining differensial tenglamalari

Kinematikadan ma’lumki, qattiq jismning tekis parallel harakati mazkur jismda qutb deb olingan nuqta holati hamda uning shu qutbdan o‘tuvchi o‘q atrofida aylanishidagi burilish burchagi orqali aniqlanadi. Jismning inersiya markazini qutb deb tanlasak, tekis parallel harakatdagi jism holati inersiya markazining koordinatalari x_S, y_S va burilish burchagi φ orqali aniqlanadi.

Jism $\vec{F}_1^e$, $\vec{F}_2^e$, ..., $\vec{F}_n^e$ kuchlar ta’sirida harakatlansin (186- rasm). Bu holda S nuqtaning harakatini jism inersiya markazining harakati haqidagi teoremadan foydalanib aniqlash mumkin:

$$M\vec{a}_S = \sum \vec{F}_\nu^e . \qquad (101.1)$$

Jismning S qutbga nisbatan harakati esa harakat tekisligiga perpendikular bo‘lgan va S nuqtadan o‘tuvchi Sz o‘q atrofidagi aylanma harakat differensial tenglamasi bilan ifodalanadi:



186-rasm.

$$I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum m_{Sz}(\vec{F}_\nu^e).\qquad(101.2)$$

$\sum \vec{F}_\nu^e=\vec{R}^e, \sum m_{Sz}(\vec{F}_\nu^e)=M_{Sz}^e$ belgilashlarni kiritsak, qattiq jism tekis parallel harakatining differensial tenglamalarini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$M\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2}=\vec{R}^e,\quad I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_{Sz}^e.\qquad(101.3)$$

(101.3) differensial tenglamalar Dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha yoziladi:

$$M\frac{d^2x_S}{dt^2}=R_x^e,\quad M\frac{d^2y_S}{dt^2}=R_y^e,\quad I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_{Sz}^e.\qquad(101.4)$$

Jism massa markazining trayektoriyasi aniq bo'lsa, S nuqta harakatini tabiiy koordinatalar sistemasida ham aniqlash mumkin. Bu holda (101.3) differensial tenglamalar sistemasi

$$M\frac{dV_S}{dt}=R_\tau^e,\quad M\frac{V_S^2}{\rho_S}=R_n^e,\quad I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_{Sz}^e\qquad(101.5)$$

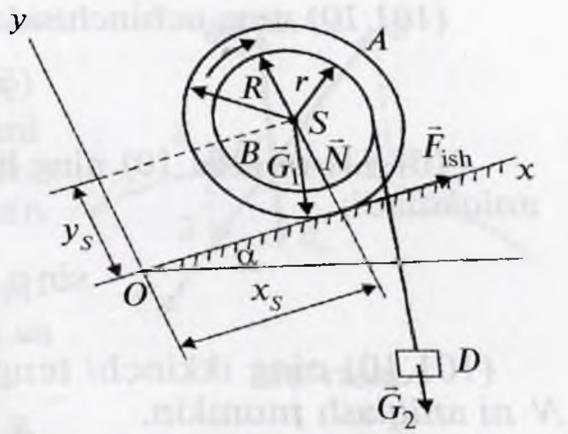
ko'rinishni oladi. Bunda ρ_S — inersiya markazi trayektoriyasining egrilik radiusi.

Qattiq jism tekis parallel harakatiga doir masalalar quyidagi tartibda yechiladi.

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar hamda bog'lanish reaksiyalari rasmda tasvirlanadi.
3. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar bosh vektorining tanlab olingan koordinata sistemasidagi proyeksiyalari hamda mazkur kuchlarning S nuqtadan o'tuvchi , harakat tekisligiga perpendikular o'qqa nisbatan momentlari yig'indisi aniqlanadi.
4. Jismning tekis parallel harakati differensial tenglamalari tuziladi.
5. Agar dinamikaning birinchi masalasini yechish kerak bo'lsa, tuzilgan differensial tenglamalardan noma'lumlar aniqlanadi; ikkinchi asosiy masalani yechish kerak bo'lsa, boshlang'ich shartlar aniqlanib, tuzilgan differensial tenglamalarning shu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topiladi.

65-masala. Radiusi r bo'lgan B baraban R radiusli A g'ildirakka mahkam biriktirilgan. B barabanga arqon o'ralgan bo'lib, arqonning bir uchiga D yuk osilgan. G'ildirak gorizontal bilan α burchak hosil qiluvchi tekislik bo'ylab o'ng tomonga sirpanmasdan dumalaydi.

G'ildirak va barabanning umumiy og'irligi G_1, yuk og'irligi G_2. Burchak α qanday bo'lganda g'ildirak inersiya markazi teng o'lchovli harakat qiladi? Boshlang'ich paytda g'ildirak tinch turgan deb hisoblansin (187- rasm).



187-rasm.

Yechish. Sanoq sistemasini 187-rasmdagidek tanlaymiz. G'ildirak tekis parallel harakatdagi jismdan iborat. Jismga g'ildirak va barabanning og'irlik kuchi $\vec{G}_1$, yuk og'irligi $\vec{G}_2$, tayanch tekisligining normal reaksiya kuchi $\vec{N}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta'sir qiladi. Bu kuchlarning Ox va Oy o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisi mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$R_x^e = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha + F_{ish},$$
$$R_y^e = -G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha + N. \quad (101.6)$$

G'ildirakka ta'sir etuvchi kuchlarning inersiya markazidan o'tuvchi va harakat tekisligiga perpendikular bo'lgan o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisini hisoblaymiz:

$$M_{Sz} = G_2 r - F_{ish} R. \quad (101.7)$$

(101.6) va (101.7) ni (101.4) ga qo'ysak, g'ildirak differensial tenglamalari kelib chiqadi:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha + F_{ish}, \\ M\ddot{y} = -G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha + N, \\ I_{Sz} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = G_2 r - F_{ish} R. \end{cases} \quad (101.8)$$

G'ildirak inersiya markazi teng o'lchovli harakatda bo'lishi uchun

$$\dot{x}_S = R\dot{\varphi} = const, \ \dot{y}_S = 0.$$

Bundan
$$\ddot{x}_S = 0, \ \ddot{y}_S = 0, \ \ddot{\varphi} = 0 \quad (101.9)$$
kelib chiqadi.

(101.9) ni (101.8) ga qo'yamiz:

$$\begin{cases} 0 = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha + F_{ish}, \\ N = G_1 \cos\alpha + G_2 \cos\alpha, \\ 0 = G_2 r - F_{ish} R. \end{cases} \quad (101.10)$$

(101.10) ning uchinchisidan:

$$F_{\text{ish}} = \frac{G_2 r}{R}. \qquad (101.11)$$

(101.11) ni (101.10) ning birinchisiga qo'ysak, noma'lum burchak aniqlanadi:

$$\sin\alpha = \frac{G_2 r}{R(G_1 + G_2)}.$$

(101.10) ning ikkinchi tenglamasidan sirtning normal reaksiyasi N ni aniqlash mumkin.

? ***Nazorat savollari***

1. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism harakat differensial tenglamasi qanday yoziladi?
2. Qattiq jism ilgarilama harakati differensial tenglamasi qanday yoziladi?
3. Qattiq jism tekis parallel harakatining differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Qattiq jism tekis parallel harakatiga oid masalalar qanday tartibda yechiladi?

XVI BOB. DALAMBER PRINSIPI. AYLANMA HARAKATDAGI JISMNING AYLANISH O'QIGA KO'RSATADIGAN BOSIMI

102- §. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Dinamika masalalarini yechishdagi hamma usullar Nyuton qonunlaridan kelib chiqadigan tenglamalarga yoki dinamikaning umumiy teoremalariga asoslanadi.

Texnikada uchraydigan ko'pgina masalalarni yechishda mexanikaning umumiy prinsiplaridan foydalanish juda qulay.

Bu prinsiplardan biri Dalamber prinsipidir. Dalamber prinsipida dinamika tenglamalariga statika tenglamalarining ko'rinishi beriladi.

Erkin moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini keltirib chiqarishda dinamikaning asosiy tenglamasidan foydalanamiz:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{yoki} \quad \vec{F} + (-m\vec{a}) = 0. \qquad (102.1)$$

Miqdori moddiy nuqta massasi bilan tezlanishining ko'paytmasiga teng bo'lib, yo'nalishi tezlanish vektoriga teskari bo'lgan vektor inersiya kuchi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

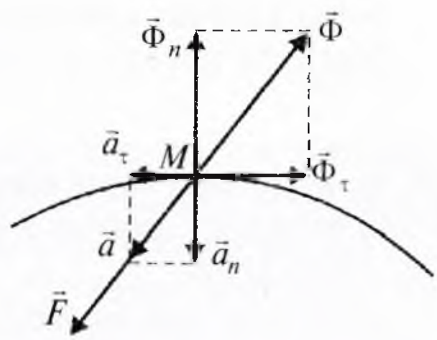
$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \qquad (102.2)$$

(102.2) ni (102.1) ga qo'yamiz:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (102.3)$$

(102.3) tenglama Dalamber prinsipini ifodalaydi: *moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch har onda inersiya kuchi* bilan muvozanatlashadi (188-rasm).

Agar moddiy nuqta egri chiziqli harakatda bo'lsa, inersiya kuchi urinma va normal tuzuvchilarga ajratiladi:



188-rasm.

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n,$$

bunda

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau, \ \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n$$

yoki

$$\Phi_\tau = m\left|\frac{dV}{dt}\right|, \ \Phi_n = m \cdot \frac{V^2}{\rho}.$$

Agar moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, $\Phi_n = 0$.

Erksiz moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0, \qquad (102.4)$$

bunda: $\vec{R}$ — bog'lanish reaksiya kuchi.

103- §. Sistema uchun Dalamber prinsipi

Mexanik sistema $M_1, M_2, \ldots, M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin. Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratsak, sistemaning har bir nuqtasi uchun Dalamber prinsipi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i + \vec{\Phi}_1, \\ \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i + \vec{\Phi}_2, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i + \vec{\Phi}_n. \end{cases} \qquad (103.1)$$

Demak, *sistemaning har bir nuqtasiga ta'sir qiluvchi tashqi va ichki kuchlar har onda shu nuqta inersiya kuchi bilan muvozanatlashadi.*

(103.1) tenglamalarni hadma-had qo'shsak:

$$\vec{R}^e + \vec{R}^i + \vec{R}^\Phi = 0 \qquad (103.2)$$

kelib chiqadi. (103.2) ifodada $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_\nu^e$ — tashqi kuchlarning bosh vektori, $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_\nu^i$ — ichki kuchlarning bosh vektori, $\vec{R}^\Phi = \sum \vec{\Phi}_\nu$ — inersiya kuchlarining bosh vektori.

Ichki kuchlar xususiyatiga ko'ra $\vec{R}^i = 0$.

Natijada (103.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0, \qquad (103.3)$$

ya'ni, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori bilan sistema nuqtalari inersiya kuchlari bosh vektorining geometrik yig'indisi nolga teng.

(103.1) ni mos ravishda nuqtalar radius-vektorlari $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ ga vektorli ko'paytirib, hosil bo'lgan natijalarni qo'shsak:

$$\sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^e + \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i + \sum \vec{r}_\nu \times \vec{\Phi}_\nu = 0 \qquad (103.4)$$

kelib chiqadi. Bu yerda: $\vec{M}_0^e = \sum \vec{r} \times \vec{F}_\nu^e$ — tashqi kuchlarning O markazga nisbatan bosh momenti; $\vec{M}_0^i = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i$ — ichki kuchlar bosh momenti; $\vec{M}_0^\Phi = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{\Phi}_\nu$ — inersiya kuchlarining bosh momenti; ichki kuchlar xususiyatiga ko'ra $\vec{M}_0^i = 0$. Bu holda (103.4) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^\Phi = 0 \qquad (103.5)$$

ya'ni, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning hamda sistema nuqtalari inersiya kuchlarining biror markazga nisbatan momentlarining yig'indisi nolga teng.

(103.3) va (103.5) tenglamalar birgalikda mexanik sistema uchun Dalamber prinsipining vektorli ko'rinishini ifodalaydi.

(103.3) va (103.5) larni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, Dalamber prinsipining analitik usulda ifodalanishini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} R_x^e + R_x^\Phi = 0, & M_x^e + M_x^\Phi = 0, \\ R_y^e + R_y^\Phi = 0, & M_y^e + M_y^\Phi = 0, \\ R_z^e + R_z^\Phi = 0; & M_z^e + M_z^\Phi = 0. \end{cases} \qquad (103.6)$$

(103.3) va (103.5) larni mos ravishda, sistema massasining markazi harakati haqidagi teorema:

$$M\vec{a}_S = \vec{R}^e \qquad (103.7)$$

hamda sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e \qquad (103.8)$$

bilan taqqoslasak, inersiya kuchlarining bosh vektori va biror markazga nisbatan bosh momentlarini aniqlovchi quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vec{R}^\Phi = -M\vec{a}_S, \qquad (103.9)$$

$$\vec{M}_0^{\Phi} = -\frac{d\vec{K}_0}{dt}. \qquad (103.10)$$

(103.9) va (103.10) dan ko'rinib turibdiki, inersiya kuchlarining bosh vektori jism massasi bilan inersiya markazi tezlanish vektorining ko'paytmasiga teng bo'lib, yo'nalishi tezlanish vektorining yo'nalishiga teskari; inersiya kuchlarining biror markazga nisbatan bosh momenti esa sistemaning shu markazga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaning teskari ishora bilan olinganiga teng.

(103.9) ning urinma va normal tuzuvchilari quyidagicha:

$$R_\tau^{\Phi} = M\left|\frac{dV_S}{dt}\right|, \quad R_n^{\Phi} = M\frac{V_S^2}{\rho}. \qquad (103.11)$$

(103.9) va (103.10) dan foydalanib inersiya kuchlarining bosh vektori hamda bosh momentining ba'zi bir xususiy hollarda hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

1. Jism ilgarilama harakatda bo'lsin. U holda jism inersiya markazi atrofida aylanma harakat qilmaydi. Bunda $\vec{M}_S^{\Phi} = 0$ bo'lib, inersiya kuchlari teng ta'sir etuvchiga keltiriladi va u inersiya kuchlarining bosh vektori kabi (103.9) tenglama bo'yicha aniqlanadi.

2. Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lib, u mazkur tekislikka tik yo'nalgan qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotganda inersiya kuchlarining bosh vektori (103.9) formula bo'yicha, inersiya kuchlarining bosh momenti esa (103.10) formulani qo'zg'almas o'qqa proyeksiyalash bilan aniqlanadi:

$$M_z^{\Phi} = -I_z\varepsilon.$$

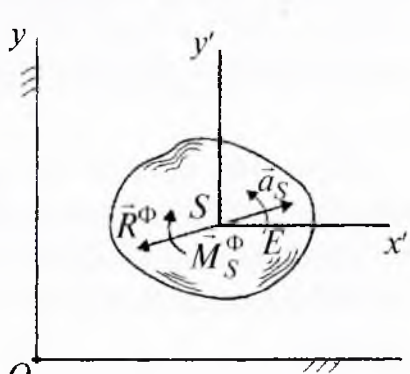
Agar aylanish o'qi jismning massa markazidan o'tsa, $\vec{R}^{\Phi} = 0$ bo'ladi.

3. Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lib, unga nisbatan parallel harakat qilayotgan bo'lsa, inersiya kuchlarining bosh vektori $\vec{R}^{\Phi} = -M\vec{a}_S$, uning proyeksiyalari

$$R_x^{\Phi} = -Ma_{Sx}, \quad R_y^{\Phi} = -Ma_{Sy},$$

bosh momenti $M_S^{\Phi} = -I_S\varepsilon$ bo'ladi. Bunda I_S – jismning inersiya markaziga nisbatan inersiya momenti.

Demak, tekis parallel harakatdagi jismga qo'yiladigan inersiya kuchlari bir bosh vektor va bir bosh momentga keltiriladi (189-rasm).



189-rasm.

104- §. Dalamber prinsipini qo'llab masalalar yechish

Dalamber prinsipi qo'llanilganda masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlanadi.
2. Ta'sir etuvchi kuchlar va reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
3. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti aniqlanadi. Shuningdek, inersiya kuchlari bosh vektorining qo'yilish nuqtasi topiladi.
4. Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining «muvozanat» tenglamalari tuziladi.
5. Tuzilgan tenglamalardan noma'lumlar aniqlanadi.

66-masala. Donni navlarga ajratadigan silindrik g'alvir o'zgarmas burchak tezlik bilan gorizontal *Ox* o'q atrofida aylanadi. Don g'alvirga nisbatan muvozanatda bo'lganda uning silindr sirtiga ko'rsatadigan bosimi hamda don va silindr sirti orasidagi ishqalanish koeffitsiyenti vaqt funksiyasi orqali ifodalansin. Don og'irligi *G*, silindr radiusi *R* ga teng. Boshlang'ich paytda don silindr sirtining eng pastida joylashgan (190-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 190-rasmdagidek tanlaymiz. Donni moddiy nuqta deb qarasak, unga og'irlik kuchi $\vec{G}$, g'alvir aylanishi tomon yo'nalgan ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$, normal reaksiya kuchi $\vec{N}$ ta'sir qiladi. ω=const hamda don nisbiy muvozanatda bo'lgani uchun uning inersiya kuchi quyidagicha bo'ladi:

$$\Phi = \Phi^n = m\omega^2 R = \frac{G}{g}\omega^2 R.$$

Natijada (102.4) ga ko'ra donning g'alvirga nisbatan muvozanat tenglamasi

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{ish} + \vec{\Phi}^n = 0. \qquad (104.1)$$

(104.1) ni *Ox*, *Oy* o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$-G\sin\omega t + F_{ish} = 0, \quad -G\cos\omega t + N - \Phi^n = 0. \qquad (104.2)$$

Bunda $F_{ish} = fN$.

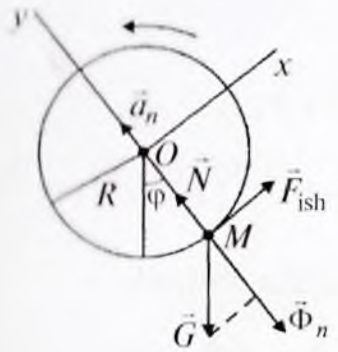
(104.2) ning ikkinchisidan:

$$N = G\cos\omega t + \frac{G}{g}\omega^2 R \quad \text{yoki} \quad N = G\left(\cos\omega t + \frac{R\omega^2}{g}\right). \qquad (104.3)$$

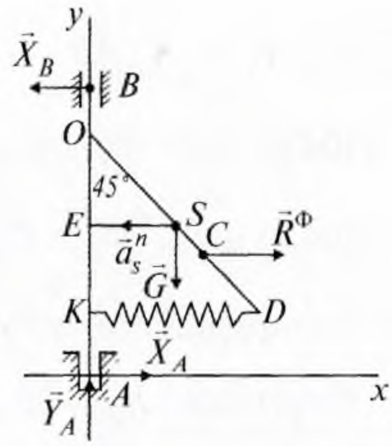
Donning silindr sirtiga ko'rsatadigan bosimi normal reaksiyaga teng, yo'nalishi unga teskari bo'ladi.

(104.3) ni e'tiborga olsak, (104.2) ning birinchisidan ishqalanish koeffitsiyentini aniqlash mumkin:

$$f = \frac{g\sin\omega t}{\omega^2 R + g\cos\omega t}.$$



190-rasm.



191-rasm.

67-masala. Doimiy $\omega = 12\ s^{-1}$ burchak tezligi bilan aylanayotgan AB vertikal valga ingichka bir jinsli OD sterjen sharnir bilan biriktirilgan. Sterjenning D uchiga DK prujina ulangan bo'lib, prujinaning K uchi AB valga tutashtirilgan. Sterjen val bilan 45° burchak, prujina esa 90° burchak hosil qiladi. Sistema holati Axy tekisligiga mos kelgan hol uchun A podpyatnik, B podshipnik reaksiyalari hamda prujina reaksiyasi aniqlansin. $Od = AO = 0{,}4$ m, $OB = 0{,}08$ m, sterjen massasi $m = 30$ kg. Prujina massasi hisobga olinmasin (191-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 191-rasmdagidek tanlaymiz. Tekshirilayotgan sistemaga og'irlik kuchi $\vec{G}$, reaksiya kuchlari $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$ ta'sir etadi.

Sterjenning inersiya kuchini aniqlash uchun uni uzunligi dx, massasi $dm = \varphi dx$ bo'lgan elementar bo'lakchalarga ajratamiz va har bir uchastkani moddiy nuqta deb qaraymiz. Bu holda sterjen nuqtalari inersiya kuchlarining bosh vektori $R^{\Phi} = m a_S^n$ formula bilan aniqlanadi.

Binobarin,

$$R^{\Phi} = m\omega^2 \frac{OD}{2} \sin 45^\circ = 50{,}76\ \text{N}.$$

Sterjen inersiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi R^{Φ} ga teng bo'lib, uning ta'sir chizig'i ΔOKD ning og'irlik markazidan o'tadi, chunki inersiya kuchlari uchburchak qonuni asosida taqsimlangan parallel kuchlardan iborat, $OC = \frac{2}{3} OD$.

Tekshirilayotgan sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasidir. Bu kuchlarning muvozanat sharti quyidagicha yoziladi:

$$\sum F_{vx} = X_A - X_B + R^{\Phi} = 0, \qquad (104.4)$$

$$\sum F_{vy} = Y_A - G = 0, \qquad (104.5)$$

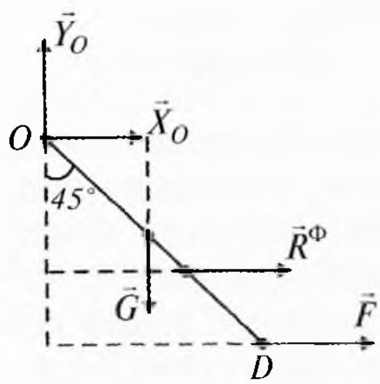
$$\sum m_B(\vec{F}_v) = X_A AB - G\frac{OD}{2}\sin 45^\circ + R^\Phi\left(OB + \frac{2}{3}OD\cos 45^\circ\right). \quad (104.6)$$

(104.5) dan: $Y_A = G = mg = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3$ N.

(104.6) dan: $X_A = G\frac{OD}{2AB}\sin 45^\circ - \frac{1}{AB}R^\Phi\left(OB + \frac{2}{3}OD\sin 45^\circ\right)$

yoki son qiymatlarni qo'ysak, $X_A = 58{,}109$ N kelib chiqadi.

(104.4) dan: $X_B = X_A + R^\Phi = 58{,}109 + 50{,}76 = 108{,}869$ N.



192-rasm.

Endi prujina reaksiyasini aniqlaymiz. Buning uchun *OD* sterjen harakatini tekshiramiz, *DK* prujinaning sterjenga ta'sirini kuch bilan almashtiramiz.

O nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz (192-rasm):

$$\sum m_O(\vec{F}_v) = R^\Phi\frac{2}{3}OD\cos 45^\circ +$$

$$+ F \cdot OD\cos 45^\circ - G\frac{OD}{2}\sin 45^\circ.$$

Son qiymatlarni qo'ysak, $F = 113{,}42$ N kelib chiqadi.

Demak, $R_A = 291{,}528$ N, $R_B = X_B = 108{,}869$ N, $F = 113{,}42$ N.

105- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanadigan jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan bosimi

Tez harakatlanadigan mashinalarning ko'payib borishi, qurilishlarda turli kranlarning keng miqyosda ishlatilishi, shuningdek, turli transport inshootlarining barpo bo'lishi ular qismlarida hosil bo'ladigan omillarni yaxshilab o'rganish zaruriyatini tug'diradi. Mashinalar rotorining qo'zg'almas o'q atrofida tez aylanishi natijasida inersiya kuchlari hosil bo'ladi. Bu inersiya kuchlarining ta'sirida rotorning aylanish o'qiga ko'rsatadigan dinamik bosimi ortadi.

Tez harakatlanadigan mashinalarni loyihalashda konstruktorlar dinamik bosimni kamaytirishlari kerak. Buning uchun dastlab jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan bosimini aniqlash lozim.

Jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan bosimini aniqlash uchun jism tayanch nuqtalarining reaksiyalari topiladi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning tayanch reaksiyalarini aniqlashda Dalamber prinsipidan foydalaniladi.

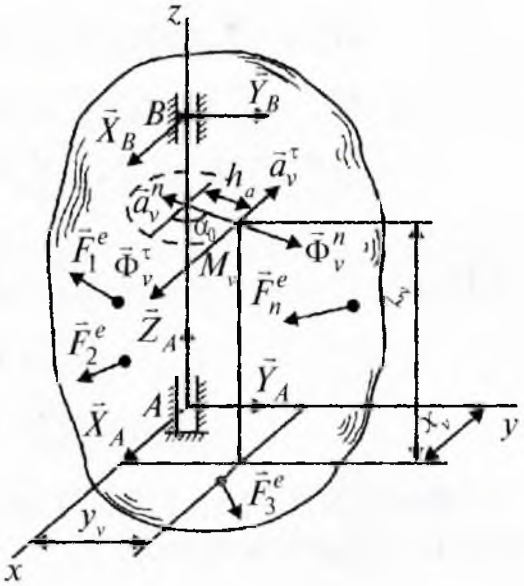
Jism $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ kuchlar ta'sirida *AB* qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan bo'lsin. Koordinata o'qlarini 193-rasmdagidek tanlaymiz. Jismning A nuqtasidagi tayanch podpyatnik, B nuqtasidagisi esa podshipnik bo'lsin.

Bu tayanchlar reaksiya kuchlarining tuzuvchilari mos ravishda $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$; $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ bo'ladi.

Jism qo'zg'almas Az o'q atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun har qaysi nuqta inersiya kuchining urinma va normal tuzuvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$\Phi_\nu^\tau = m_\nu a_\nu^\tau = m_\nu h_\nu \varepsilon,$$

$$\Phi_\nu^n = m_\nu h_\nu \omega^2,$$



193-rasm.

bunda m_ν orqali M_ν nuqtaning massasi, h_ν bilan esa M_ν nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa belgilangan.

Koordinata o'qlarining birlik yo'naltiruvchi vektorlarini $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bilan belgilasak, inersiya kuchlarining bosh vektori

$$\vec{R}^\Phi = R_x^\Phi \vec{i} + R_y^\Phi \vec{j} + R_z^\Phi \vec{k}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin, bunda:

$$R_x^\Phi = \sum \Phi_{\nu x}^\tau + \sum \Phi_{\nu x}^n, \quad R_y^\Phi = \sum \Phi_{\nu y}^\tau + \sum \Phi_{\nu y}^n, \quad R_z^\Phi = \sum \Phi_{\nu z}^\tau + \sum \Phi_{\nu z}^n.$$

Inersiya kuchining bosh vektori aylanish o'qiga perpendikular tekislikda yotgani uchun: $R_z^\Phi = 0$. Rasmdan:

$$R_x^\Phi = \sum m_\nu h_\nu \varepsilon \sin\alpha_\nu + \sum m_\nu h_\nu \omega^2 \cos\alpha_\nu,$$

$$R_y^\Phi = -\sum m_\nu h_\nu \varepsilon \cos\alpha_\nu + \sum m_\nu h_\nu \omega^2 \sin\alpha_\nu$$

yoki

$$\begin{cases} R_x^\Phi = \varepsilon \sum m_\nu y_\nu + \omega^2 \sum m_\nu x_\nu, \\ R_y^\Phi = -\varepsilon \sum m_\nu x_\nu + \omega^2 \sum m_\nu y_\nu. \end{cases} \qquad (105.1)$$

(73.6) formulaga ko'ra:

$$Mx_S = \sum m_\nu x_\nu, \quad My_S = \sum m_\nu y_\nu, \quad Mz_S = \sum m_\nu z_\nu.$$

Natijada (105.1) formula quyidagicha yoziladi:

$$R_x^e = My_S \varepsilon + Mx_S \omega^2, \quad R_y^e = My_S \omega^2 - Mx_S \varepsilon. \qquad (105.2)$$

Inersiya kuchlarining koordinata o'qlariga nisbatan momentlari yig'indisi quyidagicha:

$$M_x^{\Phi} = -\sum z_\nu \Phi_{\nu y}^{\tau} - \sum z_\nu \Phi_{\nu y}^{n} = \varepsilon \sum m_\nu x_\nu z_\nu - \omega^2 \sum m_\nu y_\nu z_\nu ,$$
$$M_y^{\Phi} = \sum z_\nu \Phi_{\nu x}^{\tau} + \sum z_\nu \Phi_{\nu x}^{n} = \varepsilon \sum m_\nu y_\nu z_\nu + \omega^2 \sum m_\nu x_\nu z_\nu ,$$
$$M_z^{\Phi} = \sum h_\nu \Phi_\nu^{\tau} = -\varepsilon \sum m_\nu h_\nu^2 .$$

yoki

$$M_x^{\Phi} = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2,$$
$$M_y^{\Phi} = I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \qquad (105.3)$$
$$M_z^{\Phi} = -I_z\varepsilon.$$

Endi (105.2) va (105.3) tenglamalar yordamida quyidagi (103.6) tenglamalarni tuzamiz:

$$\begin{cases} R_x^e + X_A + X_B + My_S\varepsilon + Mx_S\omega^2 = 0, \\ R_y^e + Y_A + Y_B + My_S\omega^2 - Mx_S\varepsilon = 0, \\ R_z^e + Z_A = 0, \\ M_x^e - Y_B AB + I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2 = 0, \\ M_y^e + X_B AB + I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = 0, \\ M_z^e - I_z\varepsilon = 0. \end{cases} \qquad (105.4)$$

(105.4) tenglamalarning oxirgisi jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatining diffensial tenglamasini ifodalaydi.

(105.4) tenglamalarning birinchi beshtasidan jismning Az atrofida aylanma harakatidagi tayanch reaksiyalarni aniqlash mumkin. Agar $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ bo‘lsa, (105.4) tenglamalar ikki nuqtasi orqali bog‘lanishdagi qattiq jismning muvozanat tenglamalarini ifodalaydi, ya’ni (105.4) da $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ deb olsak, statik reaksiyalarni aniqlash mumkin.

Jism aylanma harakatidagi tayanch reaksiyalaridan statik reaksiyalar ayirmasi dinamik reaksiya deb ataladi. Dinamik reaksiyalarni $X_A^D, Y_A^D, Z_A^D, X_B^D, Y_B^D$ deb belgilasak, ta’rifga ko‘ra:

$$\begin{cases} X_A = X_A^D + X_A^{st}, \quad X_B = X_B^D + X_B^{st}, \\ Y_A = Y_A^D + Y_A^{st}, \quad Y_B = Y_B^D + Y_B^{st}. \\ Z_A = Z_A^D + Z_A^{st}, \end{cases} \qquad (105.5)$$

(105.4) sistemada $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ va $X_A = X_A^{st}$, $Y_A = Y_A^{st}$, $Z_A = Z_A^{st}$, $X_B = X_B^{st}$, $Y_B = Y_B^{st}$ deb olsak, statik reaksiya kuchlari aniqlanadigan quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} R_x^e + X_A^{st} + X_B^{st} = 0, & M_x^e - Y_B^{st} AB = 0, \\ R_y^e + Y_A^{st} + Y_B^{st} = 0, & M_y^e + X_B^{st} AB = 0. \\ R_z^e + Z_A^{st} = 0, & \end{cases} \qquad (105.6)$$

(105.5) ni (105.4) ga qo'yib, (105.6) ni e'tiborga olsak, dinamik reaksiyalarni aniqlash mumkin bo'ladigan tenglamalar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} X_A^D + X_B^D + My_S\varepsilon + Mx_S\omega^2 = 0, \\ Y_A^D + Y_B^D + My_S\omega^2 - Mx_S\varepsilon = 0, \\ Z_A^D = 0, \\ -Y_B^D \cdot AB + I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2 = 0, \\ X_B^D + I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = 0. \end{cases} \qquad (105.7)$$

(105.7) dan:

$$\begin{cases} X_A^D = -M\varepsilon y_S - M\omega^2 x_S + \dfrac{1}{AB}(I_{yz}\varepsilon + I_{xz}), \\ Y_A^D = M\varepsilon x_S - M\omega^2 y_S + \dfrac{1}{AB}(-I_{xz}\varepsilon + I_{yz}\omega^2), \\ Z_A^D = 0, \\ X_B^D = -\dfrac{1}{AB}(I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2), \\ Y_B^D = \dfrac{1}{AB}(I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2). \end{cases} \qquad (105.8)$$

Jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan dinamik bosimi miqdor jihatidan dinamik reaksiyaga teng bo'lib, yo'nalishi unga qarama-qarshidir.

106- §. Inersiya kuchlarini muvozanatlash

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan bosimi nolga teng bo'lish shartini aniqlash texnikada muhim ahamiyatga ega.

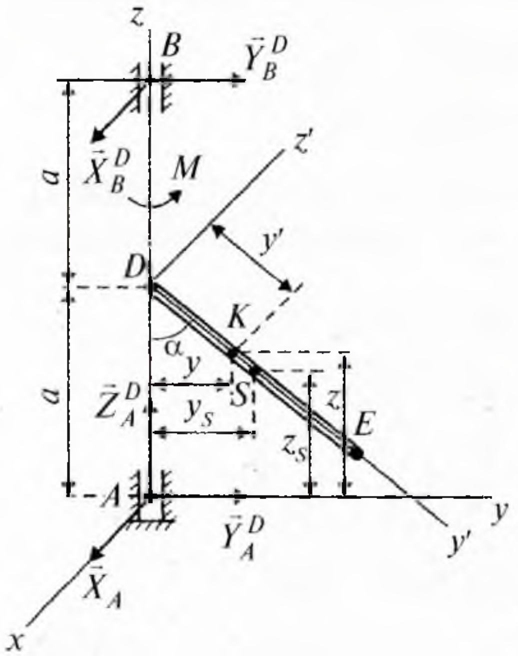
(105.8) ning oxirgi ikkitasidan ko'ramizki, $R_B^D = 0$ ning zaruriy va yetarli sharti $I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$ bo'lishidir.

$I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$ bo'lganda (105.8) tenglamaning birinchi ikkitasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$X_A^D = -M\varepsilon y_S - M\omega^2 x_S,$$
$$Y_A^D = M\varepsilon x_S - M\omega^2 y_S.$$

$X_A^D = 0$, $Y_A^D = 0$ bo‘lishi uchun $x_S = y_S = 0$ bo‘lishi kerak. Bu holda jismning inersiya markazi aylanish o‘qida yotadi. Bundan ko‘rinadiki, Az o‘q inersiya markaziy bosh o‘qidan iborat bo‘lishi kerak. Shu holdagina dinamik bosim nolga teng bo‘ladi.

68-masala. Massasi m, uzunligi l bo‘lgan bir jinsli ingichka DE sterjen D uchi bilan AB valga mahkam biriktirilgan. DE sterjen val bilan burchak hosil qiladi. Val M moment ta’sirida aylanadi.



194-rasm.

Valning burchak tezligi ω bo‘lganda sterjen holati Ayz tekisligiga mos keladi deb hisoblab, A podpyatnik va B podshipnikning dinamik reaksiyasi topilsin. $DA = DB = a$ (194-rasm).

Yechish. Koordinata o‘qlarini 194-rasmdagidek tanlaymiz. Dalamber prinsipiga ko‘ra, sterjenga og‘irlik kuchi $\vec{G}$, hamda $\vec{X}_A^D$, $\vec{Y}_A^D$, $\vec{Z}_A^D$, $\vec{X}_B^D$, $\vec{Y}_B^D$ dinamik reaksiya kuchlaridan tashqari inersiya kuchi ham ta’sir qiladi.

Masala shartiga ko‘ra sterjenning holati Ayz tekisligiga mos keladi. Shuning uchun sterjen inersiya markazining koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x_S = 0, \quad y_S = \frac{l}{2}\sin\alpha, \quad z_S = \frac{l}{2}\cos\alpha . \qquad (106.1)$$

Endi sterjenning (74.8) formulaga asosan markazdan qochma hamda Az o‘qqa nisbatan inersiya momentlarini hisoblaymiz. Buning uchun $Dy'z'$ koordinata sistemasini o‘tkazib, sterjendan $dm = \gamma dy'$ ($\gamma = m/l$) bo‘lgan K elementi ajratib olinadi. K elementning koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x = 0, \quad y = y'\sin\alpha, \quad z = a - y'\cos\alpha.$$

Natijada: $I_{xz} = \int_0^l xzdm, \quad I_{yz} = \int_0^l yzdm = \frac{m}{l}\int_0^l y'\sin\alpha(a - y'\cos\alpha)dy'$,

$$I_z = \int_0^l (x^2 + y)dm = \frac{m}{l}\int_0^l y'^2 \sin^2\alpha dy' ,$$

yoki $$I_{xz} = 0 \;, \quad I_{yz} = \frac{ml}{6}\cdot\sin\alpha(3a - 2l\cos\alpha), \qquad (106.2)$$

$$I_z = \frac{ml^2}{3}\cdot\sin^2\alpha \qquad (106.3)$$

hosil bo‘ladi.

(105.3) dan $M = I_z\varepsilon$ kelib chiqadi.

Bundan:
$$\varepsilon = \frac{M}{I_z}. \qquad (106.4)$$

(106.3) ni (106.4) ga qo'yamiz:
$$\varepsilon = \frac{3M}{ml^2\sin^2\alpha}. \qquad (106.5)$$

(106.1), (106.2) va (106.5) ni (105.8) ga qo'ysak, dinamik reaksiyalar kelib chiqadi:
$$X_A^D = -\frac{M}{4al\sin\alpha}\cdot(3a+2l\cos\alpha),\ Y_A^D = -\frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{12a}\cdot(3a+2l\cos\alpha),\ Z_A^D = 0,$$
$$X_B^D = \frac{M}{4al\sin\alpha}\cdot(2l\cos\alpha-3a),\ Y_B^D = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{12a}\cdot(2l\cos\alpha-3a)$$

? ***Nazorat savollari***

1. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi qanday bo'ladi?
2. Moddiy nuqta inersiya kuchining yo'nalishi va kattaligi qanday?
3. Tekis to'g'ri yo'lda tormozlangan temir yo'l vagonining inersiya kuchi qanday (harakat yo'nalishidami yoki unga qarshimi) yo'naladi?
4. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi nimadan iborat?
5. Statik bosim nima?
6. Dinamik bosim deganda nimani tushunasiz?
7. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism inersiya kuchi qanday aniqlanadi?
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism inersiya kuchining momenti qanday topiladi?
9. Inersiya kuchlari qanday muvozanatlanadi?
10. Urinma va normal inersiya kuchlarining yo'nalishi va miqdori qanday aniqlanadi?

XVII BOB. MUMKIN BO'LGAN KO'CHISH PRINSIPI

107- §. Bog'lanishlar klassifikatsiyasi

Bir qancha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini tekshirishda Lagranjning mumkin bo'lgan ko'chish prinsipidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini berishdan avval biz bog'lanish turlari bilan tanishib chiqamiz.

Sistema nuqtalarining harakatini cheklovchi (ya'ni, sistemani erksiz qiluvchi) omil *bog'lanish* deb ataladi. Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar tufayli sistema nuqtalarining koordinatalari, tezliklari ixtiyoriy o‘zgara olmaydi. Bog‘lanishlarning sistema yoki uning nuqtalari harakatiga ta’sirini sxematik ko‘rinishda geometrik chiziqlar, sirtlar orqali tasavvur qila olamiz. Shunga ko‘ra bog‘lanishlarni matematik tenglamalar ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu tenglamalar *bog‘lanish tenglamalari* deb ataladi.

Bog‘lanish tenglamalari sistema nuqtalarining koordinatlari, tezliklari hamda vaqt orqali ifodalanishi mumkin.

Sistema nuqtalarining koordinatalarigagina chek qo‘yuvchi bog‘lanishlar *geometrik bog‘lanishlar* deyiladi va ular quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$f(x_1, y_1, z_1; ...; x_n, y_n, z_n) = 0, \qquad (107.1)$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; ...; x_n, y_n, z_n) = 0. \qquad (107.2)$$

Agar bog‘lanish sistema nuqtalarining koordinatalaridan tashqari tezliklariga ham chek qo‘ysa, u *kinematik (differensialli) bog‘lanish* deb ataladi. Bu bog‘lanish tenglamasi

$$f(x_1, y_1, z_1; ...; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; ...; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0, \quad (107.3)$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; ...; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; ...; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0 \quad (107.4)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Agar (107.3) va (107.4) tenglamalar integrallanadigan bo‘lsa, bog‘lanish *golonom*, aks holda *begolonom bog‘lanish* deyiladi.

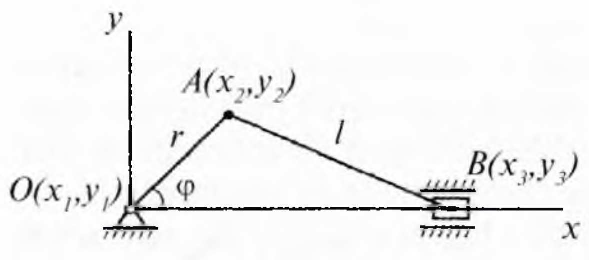
Bog‘lanish tenglamasi vaqtning oshkormas funksiyasi sifatida ifodalansa, bog‘lanish *statsionar bog‘lanish*, aks holda nostatsionar bog‘lanish deb ataladi. (107.1) va (107.3) statsionar, (107.2) va (107.4) nostatsionar bog‘lanish tenglamalaridan iborat.

Masalan, 195-rasmda ko‘rsatilgan krivoship-shatunli mexanizmning ixtiyoriy holatini uning *O, A* va *B* nuqtalari holati orqali aniqlash uchun quyidagi bog‘lanish tenglamalarini yozamiz:

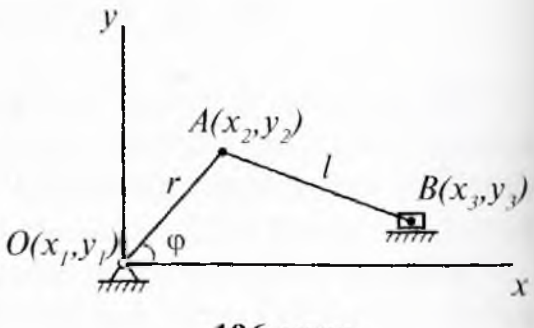
$$x_1 = y_1 = y_3 = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l^2 = 0. \qquad (107.5)$$



195-rasm.



196-rasm.

(107.5) bog'lanish tenglamalari O nuqtaning qo'zg'almasligini, OA va AB masofalar o'zgarmasligini, B nuqtaning esa Ox o'qi bo'ylab surilishini xarakterlaydi. (107.5) tenglamalar vaqtga bog'liq emas. Shuning uchun ular statsionar bog'lanishlarni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, krivoship-shatunli mexanizmning B polzuni pol sirti bo'ylab sirpansin va u vertikal yo'nalishda $y_3 = a\sin\omega t$ qonun bo'yicha sakrab garmonik tebranish hosil qilsin (196-rasm).

Tekshirilayotgan sistemaning bog'lanish tenglamasi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = 0, \\ y_3 - a\sin\omega t = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l^2 = 0. \end{cases} \qquad (107.6)$$

(107.6) tenglamaning ikkinchisi vaqtga bog'liq.

Demak, bu bog'lanish nostatsionar bog'lanishdan iborat bo'ladi.

Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar bo'shatiladigan va bo'shatilmaydigan bo'lishi mumkin. Tenglama ko'rinishida ifodalanuvchi bog'lanish bo'shatilmaydigan, tengsizlik ko'rinishida ifodalanuvchi bog'lanish esa bo'shatiladigan bog'lanish deyiladi.

108- §. Umumlashgan koordinatlar. Sistemaning erkinlik darajasi

Ma'lumki, erksiz mexanik sistema nuqtalarining ko'chishi ixtiyoriy bo'lmay, biror sabab bilan chegaralangan. Bu shuni ko'rsatadiki, sistema nuqtalarining hamma koordinatalari erkin ravishda o'zgara olmaydi; bunday koordinatalar erksiz koordinatalar deb ataladi. Bu holda sistema holati uning erkin koordinatalarining holati orqali aniqlanadi. Erksiz koordinatalar esa bog'lanish tenglamasidan topiladi.

Faraz qilaylik, sistema M_1, M_2, ..., M_n nuqtalardan tashkil topgan bo'lib, unga s ta golonom bog'lanish qo'yilgan:

$$f_i(x_1, y_1, z_1;\ ...;\ x_n, y_n, z_n) = 0,\ (i = 1, s).$$

Demak, sistema nuqtalarining $3n$ ta koordinatalari orasida s ta bog'lanish bor, ya'ni s ta koordinata erksiz. Sistema nuqtalarining erkin koordinatalar soni esa $k=3n - s$ ta koordinata orqali aniqlanadi.

Golonom bog'lanishdagi sistema holatini bir qiymatli aniqlovchi, bir biriga bog'liq bo'lmagan parametrlar soni sistemaning erkinlik darajasi deyiladi.

Masalan, 195-rasmda tasvirlangan krivoship-shatunli mexanizmni olsak, uning holatini x_2 yoki x_3, yoki y_2 orqali aniqlash mumkin. Agar mexanizmning holati x_2 orqali aniqlansa, x_3 va y_2 lar (107.5) tenglamadan topiladi. Mexanizm holatini aniqlovchi parametr deb, *OA* krivoship burilish burchagi φ ni ham olish mumkin. Demak, bu mexanizmning erkinlik darajasi birga teng.

Sistemaning fazodagi holatini bir qiymatli aniqlaydigan bir-biriga bog'liq bo'lmagan parametrlar umumlashgan koordinatalar deyiladi va ular $q_1, q_2, ..., q_k$ bilan belgilanadi. Shuni ta'kidlash kerakki, umumlashgan koordinatalarning o'lchov birligi turlicha(masalan, metr, radian, m^2, m^3) tanlanadi. 195-rasmda tasvirlangan krivoship shatunli mexanizm holatini bitta umumlashgan koordinata $q = \varphi$ orqali aniqlash mumkin.

Demak, golonom bog'lanishdagi sistemaning erkinlik darajasi uning umumlashgan koordinatalari soniga teng bo'ladi. Biz faqat golonom bog'lanishdagi sistemani ko'rib chiqamiz.

Agar sistemaga μ ta begolonom bog'lanish qo'yilgan bo'lsa, uning umumlashgan koordinatalari orasida ma'lum munosabat bo'ladi. Bunday sistemaning erkinlik darajasi $3n - s - \mu$ ta bo'ladi.

Faraz qilaylik, golonom statsionar bog'lanishdagi mexanik sistema n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, uning erkinlik darajasi k ga teng bo'lsin. Bu golonom sistemaning umumlashgan koordinatalarini $q_1, q_1, ..., q_k$ desak, tekshirayotgan sistema nuqtalarining radius-vektorlari yoki Dekart o'qlaridagi koordinatalarini umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, ..., q_k); \qquad (108.1)$$

$$\begin{cases} x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, ..., q_k), \\ y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, ..., q_k), \\ z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, ..., q_k). \end{cases} \qquad (108.2)$$

Golonom mexanik sistemaning harakat tenglamalarini umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$q_1 = q_1(t), \; q_2 = q_2(t), \; ..., \; q_k = q_k(t). \qquad (108.3)$$

Umumlashgan koordinatadan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila umumlashgan tezlik, ikkinchi tartibli hosila esa umumlashgan tezlanish deyiladi va ular quyidagicha yoziladi:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \; \ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2}. \qquad (108.4)$$

Umumlashgan tezlikning o'lchov birligi umumlashgan koordinata o'lchov birligining vaqt birligiga nisbatiga teng.

109- §. Mumkin bo'lgan ko'chish. Mumkin bo'lgan ko'chishdagi ish. Ideal bog'lanishlar

Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday cheksiz kichik ko'chishlar to'plami mumkin bo'lgan ko'chishlar deyiladi va ular δr, $\delta\varphi$, δx, δs, δq ko'rinishda ifodalanadi.

Masalan, OAB krivoship-shatunli mexanizmdagi B polzunning mumkin bo'lgan ko'chishi uning gorizontal bo'ylab δs_B cheksiz kichik ko'chishidir (197-rasm). OA krivoship A nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi OA ga tik bo'lgan δs_A cheksiz kichik ko'chishdan iborat; OA krivoshipning mumkin bo'lgan ko'chishi esa uning O atrofida $\delta\varphi_O$ cheksiz kichik burchakka burilishidir. AB shatunning mumkin bo'lgan ko'chishi P oniy markaz atrofida $\delta\varphi_P$ burchakka burilishidan iborat.

Statsionar bog'lanishdagi sistemaning haqiqiy ko'chishi biror mumkin bo'lgan ko'chish bilan ustma-ust tushadi.

Agar sistemaga nostatsionar bog'lanish qo'yilgan bo'lsa, sistema nuqtasining haqiqiy ko'chishi birorta ham mumkin bo'lgan ko'chish bilan ustma-ust tushmasligi mumkin.

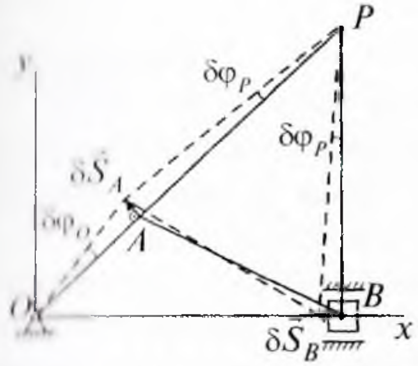
Masalan, O_1O_2 o'q atrofida aylanuvchi disk radiusi bo'ylab harakatlanayotgan K nuqtaning haqiqiy ko'chishini tekshiraylik (198-rasm). K nuqtaning haqiqiy ko'chishi quyidagicha bo'ladi:

$$d\vec{r}_a = d\vec{r}_r + d\vec{r}_e .$$

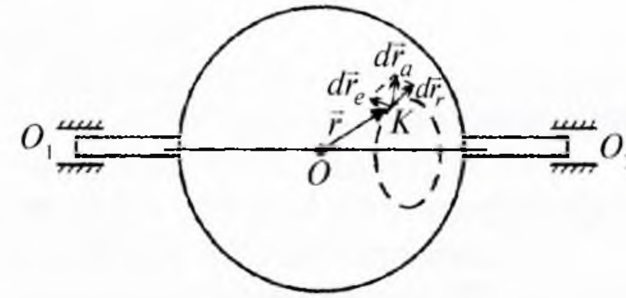
Bunda K nuqtaning nisbiy harakatidagi haqiqiy ko'chishini uning mumkin bo'lgan ko'chishini $\delta\vec{r} = d\vec{r}_r$ orqali ifodalash mumkin. Binobarin, bu holda haqiqiy ko'chish bilan mumkin bo'lgan ko'chish ustma-ust tushmaydi.

Sistema biror nuqtasiga qo'yilgan kuchning shu nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishidagi ishi kuch vektori bilan mumkin bo'lgan ko'chish vektorining skalyar ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{r} .$$



197-rasm.



198-rasm.

δA ni qisqacha kuchning mumkin bo'lgan ishi deyish mumkin.

Agar sistemaga bir qancha kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, ularning mumkin bo'lgan ishlari quyidagicha ifodalanadi:

$$\delta A = \sum \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu \ , \qquad (109.1)$$

yoki
$$\delta A = \sum (F_{\nu x} \delta x_\nu + F_{\nu y} \delta y_\nu + F_{\nu z} \delta z_\nu) \ . \qquad (109.2)$$

Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar reaksiya kuchlarining sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlaridagi ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday bog'lanishlar *ideal bog'lanishlar* deb ataladi. Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlar reaksiya kuchlarini $\vec{N}_\nu$ bilan belgilasak, ideal bog'lanishlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum \vec{N}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0 \ . \qquad (109.3)$$

110- §. Umumlashgan kuch

Ma'lumki, sistemaga qo'yilgan kuchlarning sistema mumkin bo'lgan ko'chishlaridagi ishlarining yig'indisi (109.1) formuladan aniqlanadi. (109.1) ifodada (108.1)ni nazarda tutsak, sistema M_ν nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta \vec{r}_\nu$ umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha yoziladi:

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j \ . \qquad (110.1)$$

(110.1) ni (109.1) ga qo'yamiz:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j \ . \qquad (110.2)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \ . \qquad (110.3)$$

(110.3) belgilashga ko'ra (110.2) ifoda

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j \qquad (110.4)$$

ko'rinishni oladi.

(110.3) tenglik bilan aniqlanuvchi Q_1 ifoda q_j umumlashgan koordinataga mos keluvchi *umumlashgan kuch* deb ataladi.

Umumlashgan kuchni hisoblashda quyidagi usuldan ham foydalaniladi. Bunda Q_j umumlashgan kuchni hisoblash uchun mumkin bo'lgan ko'chishlar shunday tanlanadiki, faqat Q_j ga mos kelgan umumlashgan koordinata q_j o'zgaradi, boshqa umumlashgan koordinatalar bo'yicha mumkin bo'lgan ko'chish nolga teng deb qaraladi va bu ko'chishdagi mumkin bo'lgan ish hisoblanadi.

$$(\delta A)_j = Q_j \delta q_j .$$

U holda:
$$Q_j = \frac{(\delta A)_j}{\delta q_j}. \qquad (110.5)$$

Shuningdek, umumlashgan kuchni analitik usulda quyidagicha hisoblash mumkin:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n}\left(F_{\nu x}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} + F_{\nu y}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} + F_{\nu z}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_j}\right). \qquad (110.6)$$

(110.5) dan ko'ramizki, umumlashgan kuchning o'lchovi ish o'lchov birligining umumlashgan koordinata o'lchov birligiga bo'linganiga teng. Agar umumlashgan koordinata uzunlik birligida o'lchansa, umumlashgan kuch Nyutonda ifodalanadi, umumlashgan koordinata uchun burchak olinsa, umumlashgan kuch birligi kuch, momentining birligi Nm dan iborat.

Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar potensialli bo'lganda umumlashgan kuch qanday hisoblanishini ko'ramiz.

Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar potensialli bo'lsa,

$$\delta A = \delta U(x_1,\ y_1,\ z_1;\ ...;\ x_n,\ y_n,\ z_n). \qquad (110.7)$$

(108.2) formulaga asosan:

$$U = U(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_k).$$

Shuning uchun (110.7) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k . \qquad (110.8)$$

(110.4) bilan (110.8) ni taqqoslasak:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1},\ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2},\ \cdots,\ Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

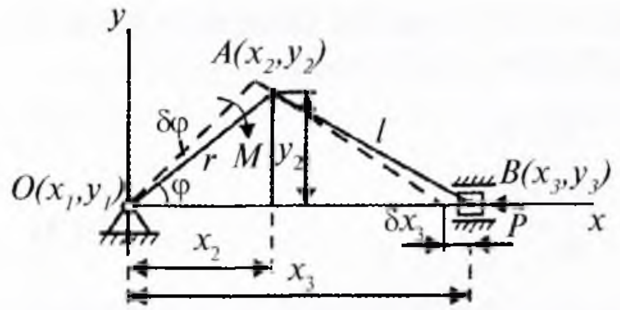
yoki
$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j},\quad (j = \overline{1,k}) \qquad (110.9)$$

kelib chiqadi.

Biroq sistemaning potensial energiyasi $\Pi = -U$ bo'lgani uchun umumlashgan kuch potensial energiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \qquad (110.10)$$

69- masala. 199-rasmda ko'rsatilgan krivoship-shatunli mexanizmning B polzuniga $\vec{P}$ kuch ta'sir qiladi. OA krivoshipga esa M moment qo'yilgan. Sharnirlardagi hamda polzundagi ishqalanish hisob-



199-rasm.

ga olinmay, φ ni umumlashgan koordinata deb olib umumlashgan kuch aniqlansin. Krivoship uzunligi $OA = r$, shatun uzunligi $AB = l$.

Yechish. Sistemaga qo'yilgan kuchlarning sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishidagi ishi quyidagicha bo'ladi:

$$\delta A = P\delta x_3 - M\delta\varphi . \tag{110.11}$$

Rasmdan: $x_2 = r\cos\varphi,\quad y_2 = r\sin\varphi,$

$$x_3 = x_2 + \sqrt{l^2 - y_2^2} = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}. \tag{110.12}$$

(110.12) dan: $\delta x_2 = -r\sin\varphi\delta\varphi,\quad \delta y_2 = r\cos\varphi\delta\varphi,$

$$\delta x_3 = -\left(r\sin\varphi + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\delta\varphi. \tag{110.13}$$

(110.13) ni (110.11) ga qo'yamiz:

$$\delta A = \left(Pr\sin\varphi + \frac{Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M\right)\delta\varphi .$$

(110.5) formulaga asosan umumlashgan koordinataga mos keluvchi umumlashgan kuch quyidagicha bo'ladi:

$$Q = Pr\sin\varphi + \frac{Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M .$$

111- §. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi mexanik sistema muvozanatining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Teorema. *Ideal, bo'shatmaydigan, statsionar bog'lanishlar qo'yilgan sistema muvozanatda bo'lishi uchun sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishida unga qo'yilgan aktiv kuchlar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.* Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining matematik ifodasi:

$$\sum \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu = 0 . \tag{111.1}$$

(111.1) shartning zarurligini isbotlaymiz. Sistema muvozanatda bo'lgani uchun uning har bir M_ν nuqtasiga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar hamda reaksiya kuchlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'ladi:

$$\vec{F}_v + \vec{N}_v = 0. \qquad (111.2)$$

Sistemaning har bir nuqtasiga $\delta\vec{r}_v$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. (111.2) ni $\delta\vec{r}_v$ ga skalyar ko'paytirib, so'ngra yig'indisi olinsa,

$$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v + \sum \vec{N} \delta\vec{r}_v = 0$$

hosil bo'ladi.

Bog'lanish ideal bo'lgani tufayli $\sum \vec{N}_v \delta\vec{r}_v = 0$.

Natijada $$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v = 0$$

kelib chiqadi. Demak, (111.1) tenglikning zaruriyligi isbotlandi. Endi (111.1) shartning yetarli bo'lishini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, (111.1) shart bajarilsa ham sistema muvozanatda bo'lmasin. Bu holda sistemaning $M_1, M_2, ..., M_n$ nuqtalari harakatga keladi. Natijada bu nuqtalarga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lmaydi. Boshlang'ich paytda sistema tinch holatda bo'lgani sababli $M_1, M_2, ..., M_n$ nuqtalari ta'sir etuvchi kuchlar ta'sirida mos ravishda $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots, d\vec{r}_n$ haqiqiy ko'chishlarni oladi. Sistemaga qo'yilgan bog'lanish statsionar bo'lgani sababli $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots, d\vec{r}_n$ haqiqiy ko'chishlar mos ravishda $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \cdots, \delta\vec{r}_n$ mumkin bo'lgan ko'chishlar bilan ustma-ust tushadi. Bu holda:

$$\begin{cases} (\vec{F}_1 + \vec{N}_1)\delta\vec{r}_1 > 0, \\ (\vec{F}_2 + \vec{N}_2)\delta\vec{r}_2 > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (\vec{F}_n + \vec{N}_n)\delta\vec{r}_n > 0. \end{cases}$$

Bu tengliklarni qo'shsak, $\sum (\vec{F}_v + \vec{N}_v)\delta\vec{r}_v > 0$ kelib chiqadi.

Bog'lanish ideal bo'lgani tufayli $\sum \vec{N}_v \delta\vec{r}_v = 0$.

Natijada $$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v > 0$$

hosil bo'ladi. Bu esa qilgan farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi. Demak, sistema muvozanatda ekan.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi Lagranj tomonidan taklif etilgan. Shuning uchun mazkur prinsip *Lagranj prinsipi* deyiladi.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining analitik ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\sum (F_{vx}\delta x_v + F_{vy}\delta y_v + F_{vz}\delta z_v) = 0.$$

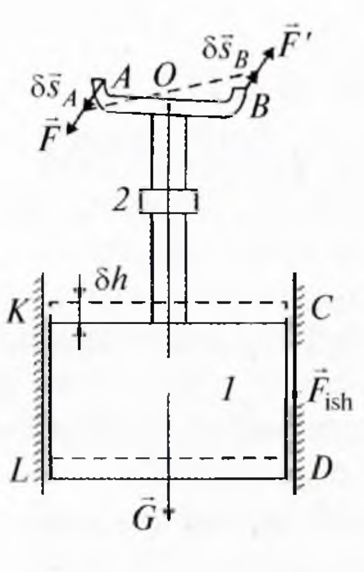
112- §. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llab masalalar yechish

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llab hal etiladigan masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sistemaga ta’sir qilayotgan kuchlar rasmda tasvirlanadi.
2. Sistemaga qo‘yilgan bog‘lanish ideal bo‘lmasa, ta’sir qiluvchi kuchlar qatoriga bog‘lanish reaksiya kuchini (ishqalanish kuchini) qo‘shish kerak.
3. Sistemaning erkinlik darajasi, ya’ni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan mumkin bo‘lgan ko‘chishlar aniqlanadi.
4. Sistemaga qo‘yilgan hamma kuchlarning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi har bir ishning yig‘indisi nolga tenglashtiriladi.
5. Tuzilgan muvozanat tenglamasida qatnashgan bir-biriga bog‘liq bo‘lgan ko‘chishlar sistema bitta nuqtasining mumkin bo‘lgan ko‘chishi orqali ifodalanadi.
6. Hosil bo‘lgan tenglamalardan noma’lumlar aniqlanadi.

Izoh: Agar masalada biror bog‘lanish reaksiya kuchini aniqlash talab etilsa, avval sistemani bu bog‘lanish ta’siri reaksiya kuchi bilan almashtirilishi, so‘ngra muvozanat tenglamalari tuzilishi kerak.

70- masala. Suv o‘tkazadigan teshikni berkituvchi *1*-zatvor (qopqoq) *2*-ko‘targich yordamida ko‘tariladi (200-rasm). Uning *KL* va *CD* yon yo‘nalishlaridagi ishqalanish kuchi F_{ish}=800 N ga teng. Ko‘targich vinti ikki kirimli bo‘lib, uning qadami h=8 mm. U *OA* va *OB* dastalar yordamida aylantiriladi. $OA=OB=l$=30 sm. Zatvor teng o‘lchovli ko‘tarilishi uchun dastalar uchlariga qanday $\vec{F}$ kuch qo‘yilishi lozimligi aniqlansin. Zatvor og‘irligi 100 N.



200-rasm.

Yechish. 200-rasmda ko‘rsatilgan mexanizmga $(\vec{F}, \vec{F}')$ juft kuch, zatvor og‘irlik kuchi $\vec{G}$ va ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta’sir qiladi.

AB dastani $\delta\varphi$ burchakka burib, mumkin bo‘lgan ko‘chish bersak, *A* va *B* nuqtalar mos ravishda, radiusi *l* bo‘lgan aylana yoyi bo‘ylab δs_A hamda $\delta s_B = \delta s_A$ ko‘chishni, zatvor esa δh ko‘chishni oladi.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini ifodalovchi (111.1) tenglamani tuzamiz:

$$\delta A = 2F\delta s_A - (G + F_{ish})\delta h = 0, \quad (112.1)$$

bunda $F_{ish} = fG$.

Masala shartiga ko'ra ko'targich vinti ikki kirimlidir. Shuning uchun A dasta bir marta to'la aylanganda zatvor ikki qadam yuqoriga siljiydi. Natijada δs_A hamda δh orasidagi munosabat quyidagicha bo'ladi:

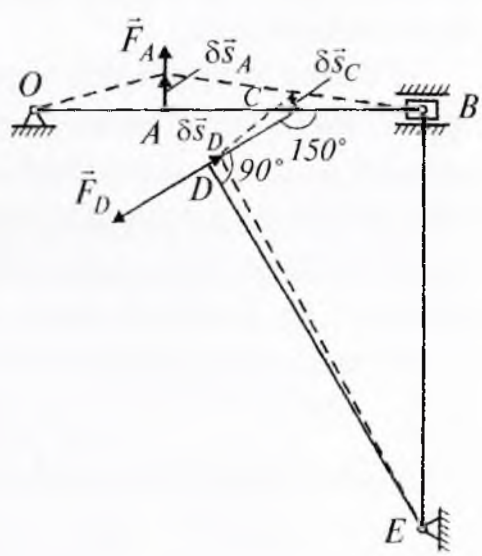
$$\delta h = \frac{h \delta s_A}{\pi l}. \tag{112.2}$$

(112.2) ni (112.1) ga qo'ysak:

$$2F\delta s_A - (G + F_{\text{ish}})\frac{h}{\pi l}\delta s_A = 0,$$

bundan $F = \dfrac{G + F_{\text{ish}}}{2\pi l}h = 3{,}8$ N kelib chiqadi.

71-masala. 201-rasmda ko'rsatilgan OAB krivoship-shatunli mexanizmda AB shatun C silindrik sharnir yordamida CD sterjen bilan bog'langan. CD va DE sterjenlar silindrik sharnir vositasida biriktirilgan. $AC = BC$; $\angle DCB = 150°$; $\angle CDE = 90°$. Mexanizm muvozanatda bo'lishi uchun OA va DE sterjenlar uchlariga perpendikular ravishda qo'yilgan F_A va F_D kuchlar qanday munosabatni qanoatlantirishi kerakligi topilsin.



201-rasm.

Yechish. Mexanizmning A va D nuqtalariga qo'yiladigan $\vec{F}_A$ va $\vec{F}_D$ kuchlarni rasmda tasvirlaymiz.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga asosan:

$$\delta A = F_A \delta s_A - F_D \delta s_D = 0. \tag{112.3}$$

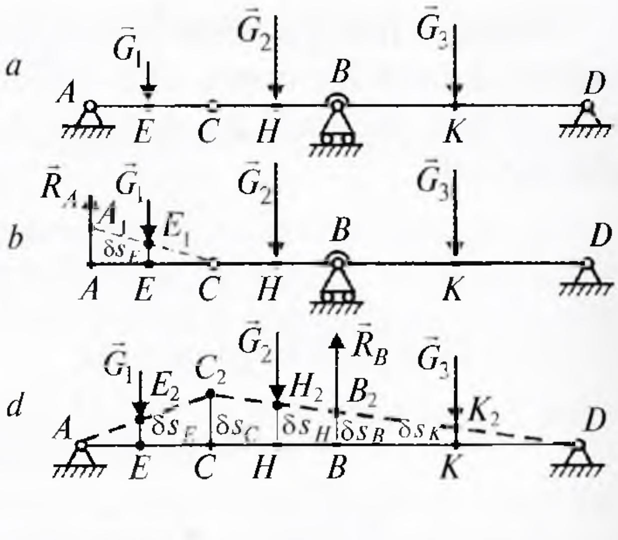
Mexanizmning A nuqtasiga $\delta\vec{s}_A$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Bu holda C nuqta $\delta\vec{s}_C$ va D nuqta $\delta\vec{s}_D$ ko'chishni oladi.

Mexanizmning ko'rilayotgan holati uchun AB zvenoning tezliklar oniy markazi B nuqtada bo'ladi. Shuning uchun $\delta s_C = \dfrac{\delta s_A}{2}$. Undan tashqari $\delta s_C \cdot \cos 60° = \delta s_D$; binobarin,

$$\delta s_D = \frac{\delta s_A}{2} \cdot \cos 60° = \frac{\delta s_A}{4}. \tag{112.4}$$

(112.4) ni (112.3) ga qo'ysak, $F_D = 4F_A$ kelib chiqadi.

72-masala. Qismlardan tuzilib, uchta tayanchda turgan AD balka C nuqtada sharnir bilan biriktirilgan ikkita balkadan iborat. Balkaga 20 kN, 60 kN, 30 kN ga teng bo‘lgan vertikal kuchlar ta’sir qiladi. $AE=EC=CH=HB=a$, $BK=KD=2a$. A va B sharnirlardagi reaksiya kuchlari aniqlansin (202-rasm).



202-rasm.

Yechish. Rasmda AD balkaga vertikal ravishda ta’sir qiluvchi G_1, G_2 va G_3 kuchlarni tasvirlaymiz.

A nuqta reaksiyasini topish uchun mazkur nuqtadagi tayanchni $\vec{R}_A$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz. Sistemaga qo‘yilgan kuchlar parallel kuchlar sistemasidan iborat bo‘lgani uchun A sharnir reaksiya kuchining gorizontal tashkil etuvchisi bo‘lmaydi.

A nuqtaga $AA_1 = \delta s_A$ (202-rasm, b) mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz. Bu holda E nuqta δs_E ko‘chishni oladi.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipiga ko‘ra

$$R_A \delta s_A - G_1 \delta s_E = 0. \qquad (112.5)$$

ΔCAA_1 va ΔCEE_1 lar o‘xshashligidan:

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_E} = \frac{AC}{EC} \quad \text{yoki} \quad \frac{\delta s_A}{\delta s_E} = \frac{2a}{a},$$

bundan
$$\delta s_E = \frac{\delta s_A}{2}. \qquad (112.6)$$

(112.6) ni (112.5) ga qo‘ysak:

$$R_A \delta s_A - G_1 \frac{\delta s_A}{2} = 0,$$

bundan $R_A = \dfrac{G_1}{2}$ yoki $R_A = 10$ N kelib chiqadi.

Endi B nuqta reaksiyasini aniqlaymiz (202-rasm, d). Buning uchun B nuqtadagi bog‘lanishni $\vec{R}_B$ reaksiya kuchi bilan almashtirib, mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz. Bu holda E, H, B, K nuqtalar mos ravishda δs_E, δs_H, δs_B, δs ko‘chishlarni oladi.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipiga asosan:

$$-G_1 \delta s_E - G_2 \delta s_H + R_B \delta s_B - G_3 \delta s_K = 0. \qquad (112.7)$$

ΔACC_2 va ΔAEE_2 ning, ΔDCC_1 va ΔDHH_2, ΔDBB_1, ΔDKK_1 larning o'xshashligidan:

$$\frac{\delta s_C}{\delta s_E} = \frac{AC}{AE}, \ \frac{\delta s_C}{\delta s_H} = \frac{CD}{HD}, \ \frac{\delta s_C}{\delta s_B} = \frac{CD}{BD}, \ \frac{\delta s_C}{\delta s_K} = \frac{CD}{KD},$$

bundan $\delta s_C = \frac{3}{2}\delta s_B, \ \delta s_E = \frac{3}{4}\delta s_B, \ \delta s_H = \frac{5}{4}\delta s_B, \ \delta s_K = \frac{1}{2}\delta s_B.$ (112.8)

(112.8) ni (112.7) ga qo'ysak:

$$-G_1 \frac{3}{4}\delta s_B - G_2 \frac{5}{4}\delta s_B + R_B \delta s_B - G_3 \frac{1}{2}\delta s_B = 0 \qquad (112.9)$$

hosil bo'ladi.

(112.9) dan $R_B = \frac{3}{4}G_1 + \frac{5}{4}G_2 + \frac{1}{2}G_3$ yoki $R_B = 105$ kN

kelib chiqadi.

? ***Nazorat savollari***

1. Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarni matematik ifodasi qanday?
2. Golonom va golonomsiz bog'lanish deb qanday bog'lanishga aytiladi?
3. Statsionar va nostatsionar bog'lanish nima?
4. Bo'shatadigan, bo'shatmaydigan bog'lanishlarni ta'riflang.
5. Mexanik sistemaning erkinlik darajasi nima?
6. Qanday bog'lanishlar ideal bog'lanishlar deb ataladi?
7. Sistemaning umumlashgan koordinatalarini ta'riflang.
8. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi nima?
9. Qanday kuchlar umumlashgan kuchlar deyiladi?
10. Umumlashgan kuchlarning analitik ifodasi qanday?
11. Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi deganda nimani tushunasiz?
12. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jismning aylanish burchagi umumlashgan koordinata uchun qabul qilinsa, umumlashgan kuch nimaga teng bo'ladi?

XVIII BOB. DINAMIKANING UMUMIY TENGLAMASI. LAGRANJNING II TUR TENGLAMALARI

113- §. Dinamikaning umumiy tenglamasi

Dinamikaning umumiy tenglamasini keltirib chiqarish uchun ideal va bo'shatmaydigan bog'lanishdagi mexanik sistema nuqtalari uchun Dalamber prinsipini yozamiz:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0, \\ \vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{F}_n + \vec{N}_n + \vec{\Phi}_n = 0. \end{cases} \tag{113.1}$$

Sistema nuqtalariga mumkin bo'lgan ko'chish berib, (113.1) tenglamani tegishlicha $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2, \ldots,$ $\delta\vec{r}_n$ larga skalyar ko'paytirib, hosil bo'lgan ifodalarni hadlab qo'shsak:

$$\sum(\vec{F}_\nu + \vec{N}_\nu + \vec{\Phi}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0$$

kelib chiqadi. Sistema ideal bog'lanishda bo'lgani tufayli

$$\sum \vec{N}_\nu \delta\vec{r}_\nu = 0 .$$

Shunday qilib, $$\sum(\vec{F}_\nu + \vec{\Phi}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0 \tag{113.2}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

(113.2) tenglama analitik usulda Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\sum\left[(F_{\nu x} - m_\nu \ddot{x}_\nu)\delta x_\nu + (F_{\nu y} - m_\nu \ddot{y}_\nu)\delta y_\nu + (F_{\nu z} - m_\nu \ddot{z}_\nu)\delta z_\nu\right] = 0. \tag{113.3}$$

(113.2) yoki (113.3) dinamikaning umumiy tenglamasi deyiladi va quyidagi teorema bilan ta'riflanadi: *ideal va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning hamda inersiya kuchlarining har qanday mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishlarining yig'indisi nolga teng.*

Dinamikaning umumiy tenglamasi Dalamber hamda Lagranj prinsiplarini birgalikda qaralishidan kelib chiqqani sababli (113.2) Dalamber-Lagranj tenglamasi deb ham ataladi.

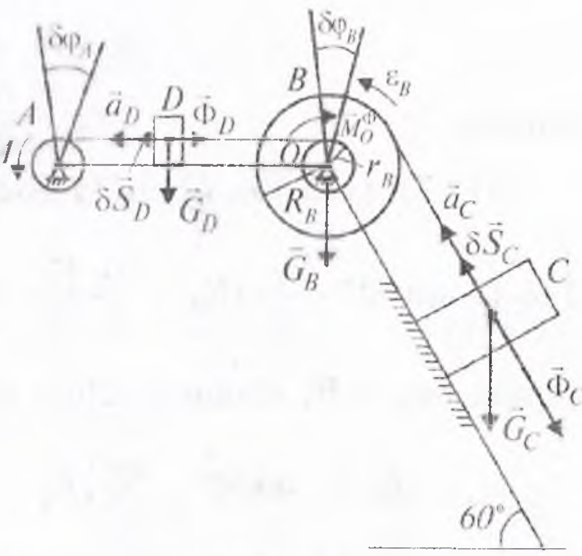
Mazkur tenglamani qo'llab yechiladigan masalalar quyidagi tartibda hal etiladi.

1. Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar hamda ideal bo'lmagan bog'lanishlar reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
2. Sistemani tashkil etuvchi har qaysi jism inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti aniqlanadi.
3. Sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish beriladi.
4. Dinamikaning umumiy tenglamasi tuziladi.
5. Tuzilgan tenglamadan kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

73-masala. Mexanik sistema A blokka hamda B pog'onali shkivga o'ralgan arqonlar, shuningdek, bu arqonlarga bog'langan C va D yuklardan iborat (203-rasm). B, C, D jismlarning og'irliklari mos ravishda $\vec{G}_B$, $\vec{G}_C$, $\vec{G}_D$. A blokka qo'yilgan M momentli juft kuch ta'sirida sistema vertikal tekislikda harakat qiladi; G_B=30 N, G_C=40 N,

$G_D = 20$ N, $M = 16$ Nm, $R_A = 0{,}2$ m, $R_B = 0{,}3$ m, $r_B = 0{,}15$ m. B shkivning inersiya radiusi $\rho_B = 0{,}2$ m. Sistema nuqtalari orasidagi ishqalanishlarni hamda A blok og'irligini hisobga olmay, C yukning tezlanishi aniqlansin.

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaga ideal bog'lanishlar qo'yilgan. Ta'sir qiluvchi kuchlar 203-rasmda ko'rsatilgan. C yuk tezlanishini $\bar{a}_C$ bilan belgilaymiz.



203-rasm.

Sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlar qatoriga yuklarning

$$\Phi_C = \frac{G_C}{g} a_C, \quad \Phi_D = \frac{G_D}{g} a_D \tag{113.4}$$

inersiya kuchlarining hamda pog'onali B shkivning

$$M_0^\Phi = \frac{G_B}{g} \rho_B^2 \varepsilon_B \tag{113.5}$$

inersiya kuchlarining momentini qo'shamiz.

C va D yuklar B shkivga arqon yordamida bog'langani sababli

$$a_C = \varepsilon_B R_B, \quad a_D = \varepsilon_B r_B \tag{113.6}$$

bo'ladi. (113.6) dan: $\varepsilon_B = \dfrac{a_C}{R_B}, \quad a_D = \dfrac{a_C}{R_B} \cdot r_B$. (113.7)

(113.7) ni (113.4) va (113.5) ga qo'ysak:

$$\Phi_C = \frac{G_C}{g} \cdot a_C, \quad \Phi_D = \frac{G_D}{g} \frac{r_B}{R_B} \cdot a_C, \quad M_0^\Phi = \frac{G_B}{g} \frac{\rho_B^2}{R_B} \cdot a_C \tag{113.8}$$

kelib chiqadi.

Sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish bersak, C, D yuklar mos ravishda δs_C, δs_D ko'chishlarni, shuningdek, A blok mumkin bo'lgan $\delta\varphi_A$ burilishni, B shkiv esa $\delta\varphi_B$ burilishni oladi.

Natijada dinamikaning umumiy tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$(-G_C \sin 60° - \Phi_C)\delta s_C - M_0^\Phi \delta\varphi_B - \Phi_D \delta s_D + m\delta\varphi_A = 0. \tag{113.9}$$

δs_C, δs_D va $\delta\varphi_A$ larni $\delta\varphi_B$ orqali ifodalaymiz.

203-rasmdan $\quad \delta s_C = R_B \delta\varphi_B, \quad \delta s_D = r_B \delta\varphi_B$. (113.10)

B shkiv A blok bilan arqon vositasida biriktirilgani tufayli:

$$R_A\delta\varphi_A = r_B\delta\varphi_B, \qquad (113.11)$$

bundan
$$\delta\varphi_A = \frac{r_B}{R_A}\cdot\delta\varphi_B.$$

(113.7), (113.10), (113.11) ifodalarni (113.9) ga qo'ysak:

$$\left[G_C\left(-\sin 60^\circ - \frac{a_C}{g}\right)R_B - \frac{G_B}{g}\frac{\rho_B^2}{R_B}\cdot a_C - \frac{G_D}{g}\frac{r_B^2}{R_B}\cdot a_C + M\frac{r_B}{R_A}\right]\delta\varphi_B = 0,$$

bunda $\delta\varphi_B \neq 0$; shuning uchun yuqoridagi tenglikdan

$$G_C\left(-\sin 60^\circ - \frac{a_C}{g}\right)R_B - \frac{G_B}{g}\frac{\rho_B^2}{R_B}\cdot a_C + M\frac{r_B}{R_B} = 0 \qquad (113.12)$$

kelib chiqadi. Masala shartidagi berilganlarni e'tiborga olsak, (113.12) dan

$$a_C = 0{,}9 \text{ m/s}$$

hosil bo'ladi.

114- §. Lagranjning II tur tenglamalari

Lagranjning ikkinchi tur tenglamalarini keltirib chiqarish uchun dinamikaning umumiy tenglamasi quyidagicha yozib olinadi:

$$\sum(\vec{F}_\nu - m_\nu\ddot{\vec{r}}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0. \qquad (114.1)$$

Faraz qilaylik, golonom, ideal va bo'shatmaydigan bog'lanishdagi sistema n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, erkinlik darajasi k ta bo'lsin.

Ma'lumki, sistema nuqtasining radius-vektorini umumlashgan koordinatalar funksiyasi sifatida quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_k, t). \qquad (114.2)$$

Sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlari

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\cdot\delta q_j, \quad (\nu = \overline{1,n}). \qquad (114.3)$$

(114.3) ni (114.1) ga qo'yamiz:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\ddot{\vec{r}}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0.$$

(110.3) formulaga ko'ra:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}.$$

Natijada,
$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j-\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{\vec r}_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0. \qquad (114.4)$$

(114.4) dagi $\ddot{\vec r}_\nu \dfrac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}$ ni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\ddot{\vec r}_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}=\frac{d\dot{\vec r}_\nu}{dt}\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right)-\dot{\vec r}_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right). \qquad (114.5)$$

(114.2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{\vec r}_\nu=\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_1}\dot q_1+\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_2}\dot q_2+\dots+\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}. \qquad (114.6)$$

(114.6) dan q_j hamda $\dot q_j$ bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial \dot{\vec r}_\nu}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_1\partial q_j}\dot q_1+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_2\partial q_j}\dot q_2+\dots+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_j\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial t\partial q_j},\ (j=\overline{1,k}); \qquad (114.7)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec r}_\nu}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j},\ (j=\overline{1,k}). \qquad (114.8)$$

Endi (114.5) ifodadagi $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right)$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_j\partial t}+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_j\partial q_1}\dot q_1+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_j\partial q_2}\dot q_2+\dots+\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_j\partial q_k}\dot q_k. \qquad (114.9)$$

(114.7) bilan (114.9) ni solishtirsak,

$$\frac{\partial \dot{\vec r}_\nu}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right) \qquad (114.10)$$

kelib chiqadi.

(114.7) va (114.10) ni (114.5) ga qo'yamiz:

$$\ddot{\vec r}_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_\nu\frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial \dot q_j}\right)-\dot{\vec r}_\nu\frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial q_j}$$

yoki

$$\ddot{\vec r}_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec r}_\nu^{\,2}}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec r}_\nu^{\,2}}{\partial q_j}. \qquad (114.11)$$

(114.11) ni (114.4) ga qo'ysak:

$$\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j-\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\left(m_\nu \dot{\vec r}_\nu^{\,2}\right)\right]-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(m_\nu \dot{\vec r}_\nu^{\,2}\right)\right\}\delta q_j=0$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2}\right)\right\}\delta q_j = 0$$

hosil bo'ladi.

Bunda $\sum \frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2} = T$ – sistemaning kinetik energiyasi bo'lgani uchun

$$\sum_{j=1}^{k}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0 \tag{114.12}$$

tenglamani hosil qilamiz.

(114.12) $\delta q_j \neq 0$ da shuning uchun, (114.12) dan quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:

$$Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad (j = \overline{1,k})$$

yoki

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = \overline{1,k}). \tag{114.13}$$

(114.13) tenglamalar *Lagranjning II tur tenglamalari* deyiladi. Shunday qilib, Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari dinamika umumiy tenglamasining umumlashgan koordinatalar orqali ifodasidan iborat.

Lagranj II tur tenglamalarining afzalligi shundan iboratki, bu tenglamalar soni sistemaning erkinlik darajasi soniga teng bo'lib, sistemani tashkil etuvchi nuqtalar soniga bog'liq emas.

Agar ta'sir qiluvchi kuch potensialli bo'lsa, $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$; bu holda (114.13) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = \overline{1,k}). \tag{114.14}$$

Bundagi $L = T - \Pi$ – Lagranj funksiyasi yoki Lagranjning kinetik potensiali deyiladi; $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_k)$ esa potensial energiyadan iborat.

115- §. Lagranjning II tur tenglamalarini tatbiq etib masalalar yechish

Lagranjning II tur tenglamasini tatbiq etib hal qilinadigan masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Berilgan sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi.
2. Umumlashgan koordinatalar tanlab olinadi.
3. Sistemaning kinetik energiyasi hisoblanadi va u umumlashgan tezliklar orqali ifodalanadi.
4. Umumlashgan kuch aniqlanadi.
5. Lagranjning II tur tenglamalari tuziladi.
6. Tuzilgan tenglamadan kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

74-masala. m_1 massali DE sterjen har birining massasi m_2 bo'lgan uchta g'altak ustida yotadi. Sterjenning o'ng tomoniga gorizontal ravishda yo'nalgan $\vec{F}$ kuch qo'yilgan. U sterjen va g'altaklarni harakatga keltiradi. DE sterjenning tezlanishi aniqlansin.

G'altaklar bir jinsli doiraviy silindr deb hisoblansin. Sterjen bilan g'altaklar, shuningdek, g'altaklar bilan gorizontal tekislik orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin (204-rasm).

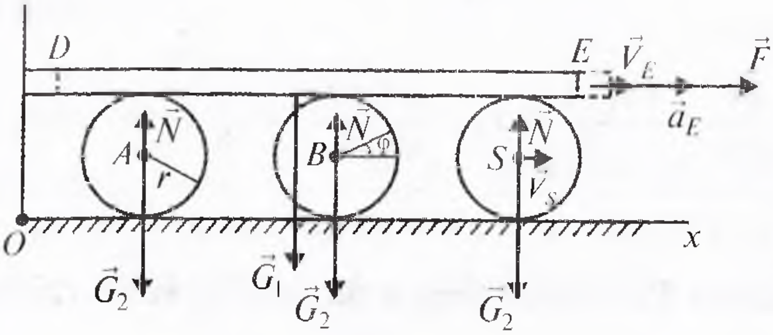
Yechish. Tekshirilayotgan sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal. Sistemaning holati DE sterjen E nuqtasining koordinatasi x_E – umumlashgan koordinata orqali bir qiymatli aniqlanadi. Demak, sistema bitta erkinlik darajasiga ega.

DE sterjen tezlanishini aniqlash uchun Lagranjning II tur tenglamasini tuzish kerak. Buning uchun avval sistema kinetik energiyasini hisoblaymiz. Sistema kinetik energiyasi sterjen va g'altaklar kinetik energiyalarining yig'indisiga teng:

$$T = T_{DE} + T_{g'al}. \qquad (115.1)$$

DE sterjen ilgarilama harakatda bo'lgani tufayli uning kinetik energiyasi quyidagicha:

$$T_{DE} = \frac{1}{2} m_1 V_E^2. \qquad (115.2)$$



204-rasm.

G‘altaklar tekis parallel harakatda. Shuning uchun ularning kinetik energiyasi:

$$T_{g'al} = 3\left(\frac{1}{2}m_2 V_S^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2\right),$$

yoki
$$T_{g'al} = 3\left(\frac{1}{2}m_2 V_S^2 + \frac{1}{4}m_2 r^2\omega^2\right). \qquad (115.3)$$

G‘ildiraklarning tekislik bilan urinish nuqtalari tezliklar oniy markazi bo‘lgani uchun

$$V_S = \omega r, \ V_E = \omega \cdot 2r. \qquad (115.4)$$

(115.4) dan:

$$V_S = \frac{1}{2}V_E. \qquad (115.5)$$

(115.4) ni (115.3) ga qo‘ysak:

$$T_{g'al} = 3\left(\frac{1}{8}m_2 V_E^2 + \frac{1}{16}m_2 V_E^2\right) = \frac{9}{16}m_2 V_E^2. \qquad (115.6)$$

(115.2) va (115.6) ni (115.1) ga qo‘yamiz:

$$T = \frac{V_E^2}{16}(9m_2 + 8m_1) = \frac{8m_1 + 9m_2}{16}\dot{x}_E^2. \qquad (115.7)$$

Endi sistemaga x_E umumlashgan koordinata bo‘yicha δx_E mumkin bo‘lgan ko‘chish berib, umumlashgan kuchni aniqlaymiz. Sistemaga qo‘yilgan kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi ishlarning yig‘indisini hisoblaymiz: $\delta A = F\delta x_E$.

Umumlashgan kuchni aniqlash formulasi $Q_{x_E} = \dfrac{\delta A}{\delta x_E}$ ga ko‘ra

$$Q_{x_E} = F. \qquad (115.8)$$

Sistemaning erkinlik darajasi bitta bo‘lgani sababli Lagranj II tur tenglamasi bitta bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_E} = Q_{x_E}. \qquad (115.9)$$

(115.7) dan:

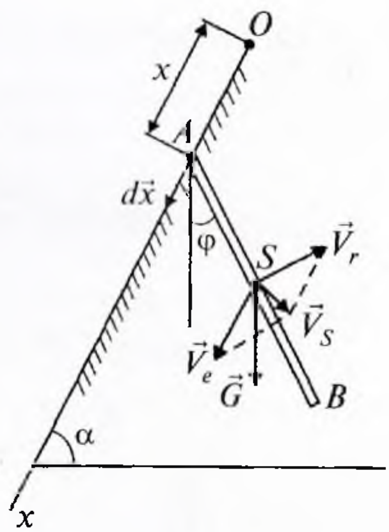
$$\frac{\partial T}{\partial x_E} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} = \frac{8m_1 + 9m_2}{8}\dot{x}_E, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E}\right) = \frac{a_E}{8}(8m_1 + 9m_2). \qquad (115.10)$$

(115.8) va (115.10) ni (115.9) ga qo‘yamiz: $\dfrac{a_E}{8}(8m_1 + 9m_2) = F$.

Bu ifodadan DE sterjenning tezlanishi a_E kelib chiqadi:

$$a_E = \frac{8F}{8m_1 + 9m_2} \ (\text{m/s}^2).$$

75-masala. Uzunligi l bo'lgan bir jinsli AB sterjen vertikal tekislikda A sharnir atrofida aylanishi mumkin. Sterjenning og'irligi $G=Mg$ ga teng. Sterjenning A uchi esa gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi tekislik bo'ylab ishqalanmasdan sirpanadi. Sterjen harakatining differensial tenglamasi tuzilsin (205-rasm).



205-rasm.

Yechish. Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lib, sistemaning erkinlik darajasi ikkita. Demak, umumlashgan koordinatalar ham ikkita bo'lib, ular uchun A nuqtaning og'ma tekislik bo'ylab ko'chishi $q_1=x$ hamda sterjenning vertikaldan og'ishi $q_2=\varphi$ olinishi mumkin. Sanoq sistemasi 205-rasmdagidek tanlanadi.

Sterjenning kinetik energiyasini hisoblaymiz: $T=\frac{1}{2}MV_S^2+\frac{1}{2}I_S\omega^2$.

Bunda $\omega=\dot\varphi$, $I_S=\frac{Ml^2}{12}$, bu yerda M – sterjen massasi.

S nuqta tezligi tezliklarni qo'shish teoremasidan foydalanib aniqlanadi:

$$\vec V_S=\vec V_r+\vec V_e,$$

bu yerda: $\vec V_r$ — sterjen inersiya markazining A nuqta atrofida aylanishidagi nisbiy tezligi; $\vec V_e$ — S nuqtaning og'ma tekislikka parallel bo'lgan ko'chirma tezligi. Ularning miqdorlari quyidagicha:

$$V_r=\frac{l}{2}\dot\varphi,\quad V_e=\dot x.$$

205-rasmdan (kosinuslar teoremasiga ko'ra):

$$V_S^2=\dot x^2+\frac{l^2}{4}\dot\varphi^2-\dot x l\dot\varphi\cos(\alpha-\varphi).$$

Natijada $$T=\frac{M}{2}\left[\dot x^2+\frac{l^2\dot\varphi^2}{4}-l\dot x\dot\varphi\cos(\alpha-\varphi)\right]+\frac{Ml^2}{24}\dot\varphi^2. \quad (115.11)$$

(115.11) dan:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot x}=M\dot x-\frac{Ml\dot\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{1}{2}Ml\dot\varphi\dot x\sin(\alpha-\varphi),\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Ml^2\dot\varphi}{4}-\frac{Ml\dot x\cos(\alpha-\varphi)}{2}+\frac{Ml^2\dot\varphi}{12};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x}\right)=M\ddot x-\frac{1}{2}Ml\ddot\varphi\cos(\alpha-\varphi)-\frac{1}{2}Ml\dot\varphi^2\sin(\alpha-\varphi); \quad (115.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right)=\frac{Ml^2}{4}\ddot\varphi-\frac{1}{2}Ml\ddot x\cos(\alpha-\varphi)-\frac{1}{2}Ml\dot x\dot\varphi\sin(\alpha-\varphi)+\frac{Ml^2\ddot\varphi}{12}.$$

Umumlashgan kuchlar quyidagicha bo'ladi:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x},\ Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi}$$

yoki $Q_x = \dfrac{G\delta x \sin\alpha}{\delta x} = G\sin\alpha,\ Q_\varphi = -\dfrac{Gl\sin\varphi\delta\varphi}{2\delta\varphi} = -\dfrac{Gl}{2}\sin\varphi$, (115.13)

bunda $G = Mg$.

Endi Lagranj II tur tenglamasini yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (115.14)$$

(115.12) va (115.13) ni (115.14) ga qo'yamiz:

$$\frac{l\ddot{\varphi}}{3} - \frac{\ddot{x}\cos(\alpha-\varphi)}{2} + \frac{g\sin\varphi}{2} = 0,\quad \ddot{x} - \frac{l\ddot{\varphi}}{2}\cos(\alpha-\varphi) - \frac{l\dot{\varphi}^2}{2}\sin(\alpha-\varphi) - g\sin\alpha.$$

Bu sterjen harakatining differensial tenglamalarini ifodalaydi.

? ***Nazorat savollari***

1. Dinamikaning umumiy tenglamasi qanday yoziladi?
2. Lagranj II tur tenglamasini yozing.
3. Sistemaga ta'sir qilayotgan kuch qanday holda potensialli bo'ladi?
4. Potensialli kuch uchun Lagranj II tur tenglamasi qanday yoziladi?
5. Dinamikaning umumiy tenglamasiga doir masalalar qanday tartibda yechiladi?
6. Lagranjning ikkinchi tur tenglamasiga oid masalalar qanday hal etilishini tushuntiring.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Aziz-Qoriyev S.Q., Yangurazov Sh.Ch.** Nazariy mexanikadan masalalar yechish. 1-qism. Statika va kinematika. – T., «O'qituvchi», 1974; 2-qism. Dinamika. – T., «O'qituvchi», 1975.
2. **Boymurodova L.I., Shoyusupov Sh.A., Giyasova N.T.** Nazariy mexanika (Statikadan ma'ruzalar matni). – T., TIMI, 2006.
3. **Воронков И.М.** Курс теоретической механики. – М., «Наука», 1966.
4. **Giyasova N.T., Xalmatova X.T.** Nazariy mexanika (Kinematikadan metodik ko'rsatma). – T., TIMI, 2007.
5. **Добранравов В.В., Никитин Н.Н.** Курс теоретической механики. – М., «Высшая школа», 1983.
6. **Meshcherskiy I.V.** Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. – T., «O'qituvchi», 1989.
7. **Rashidov T.R., Shoziyotov Sh., Mo'minov Q.B.** Nazariy mexanika asoslari. – T., «O'qituvchi», 1990.
8. **Tolipova L.I.** Nazariy mexanika. – T., «Mehnat», 1987.

MUNDARIJA